

Physikalisch-Astronomische Fakultät der  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Theoretisch-Physikalisches Institut

**Kanonische Formulierung der  
post-Newtonischen/post-Coulombschen  
Punktteilchen-Dynamik höherer Ordnung  
in harmonischer/Lorentz- Eichung**

Diplomarbeit

eingereicht von Raoul-Martin Memmesheimer,  
geboren am 1.3.1979 in Duisburg

1. Gutachter : Prof. Dr. Gerhard Schäfer  
2. Gutachter : Prof. Dr. Reinhard Meinel  
Tag der Verleihung des Diploms :

# Inhaltsverzeichnis

Ziele der Arbeit	5
Notation	7
<b>I Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
<b>1 Post-Newtonssche und post-Coulombsche Langrangefunktionen</b>	<b>12</b>
1.1 Motivation . . . . .	12
1.1.1 Dynamik in der Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	12
1.1.2 Hamilton-Formalismus in der Elektrodynamik . . . . .	13
1.2 Eichungen in Allgemeiner Relativitätstheorie und Elektrodynamik	14
1.2.1 Unterbestimmtheit von $g_{\mu\nu}$ . . . . .	14
1.2.2 Die harmonische Eichung . . . . .	16
1.2.3 Unterbestimmtheit von $A^\mu$ . . . . .	17
1.2.4 Die Lorentz-Eichung . . . . .	18
1.3 Ableitung der post-Newtonsschen Lagrangefunktion . . . . .	19
1.3.1 Hadamard-Regularisierung . . . . .	19
1.3.2 Das Problem der Quellen . . . . .	20
1.3.3 post-Newtonssche Approximation der Einstein-Gleichung .	23
1.4 Ableitung der post-Coulombschen Lagrangefunktion . . . . .	25
1.4.1 Die Liénard-Wiechertschen Potentiale . . . . .	25
1.4.2 Die post-Coulombschen Bewegungsgleichungen . . . . .	26
<b>2 Die Poincaré-Gruppe</b>	<b>30</b>
2.1 Einige Eigenschaften . . . . .	30
2.1.1 Gruppentheoretische Eigenschaften . . . . .	30

2.1.2	Wirkung der Lorentzgruppe . . . . .	31
2.1.3	Wirkung der Poincarégruppe . . . . .	32
2.2	Die Lie-Algebra der Poincarégruppe . . . . .	33
2.2.1	Erzeugende der Poincarégruppe . . . . .	33
2.2.2	Die Poincaré-Algebra . . . . .	34
2.2.3	Eine geometrische Sicht der Dinge . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Singuläre Systeme höherer Ordnung</b>	<b>39</b>
3.1	Reguläre Systeme höherer Ordnung . . . . .	39
3.1.1	Lagrangeformalismus in höherer Ordnung . . . . .	39
3.1.2	Hamiltonformalismus in höherer Ordnung . . . . .	40
3.2	Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	43
3.2.1	Lagrangeformalismus mit Zwangsbedingungen . . . . .	43
3.2.2	Hamiltonformalismus mit Zwangsbedingungen . . . . .	47
3.3	Verallgemeinerte kanonische Transformationen . . . . .	55
3.3.1	Kanonische Transformationen im Fall höherer Ordnung . . . . .	55
3.3.2	Verallgemeinerte kanonische Transformationen . . . . .	58
3.3.3	Eine geometrische Sicht der Dinge . . . . .	59
3.4	Erzeugende auf Systemen von Teilchen . . . . .	61
3.4.1	Die Erzeugende $H$ . . . . .	61
3.4.2	Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$ . . . . .	62
3.4.3	Die Erzeugende $G_i$ . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>67</b>
<b>Vorbemerkung</b>		<b>68</b>
<b>4</b>	<b>Newtonscche und Coulombsche Zweiteilchen-Systeme</b>	<b>70</b>
4.1	Lagrangefunktionen . . . . .	70
4.2	Hamiltonfunktionen . . . . .	71
4.3	Die Erzeugenden $P_i$ , $J_i$ und $G_i$ . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Zweiteilchen-Systeme in erster Näherung (1pN, 1pC)</b>	<b>75</b>
5.1	Lagrangefunktionen . . . . .	75
5.2	Hamiltonfunktionen . . . . .	76
5.3	Die Erzeugenden $P_i$ , $J_i$ und $G_i$ . . . . .	77

<b>6 Zweiteilchen-Systeme in zweiter Näherung (2pN, 2pC)</b>	<b>80</b>
6.1 Lagrangefunktionen . . . . .	80
6.2 Hamiltonformalismus für Lagrangefunktionen der Form (6.1, 6.2)	81
6.3 Verallgemeinerung der Methode von Ref. [3] . . . . .	86
6.4 Hamiltonfunktionen . . . . .	87
6.5 Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$ . . . . .	90
6.6 Die Erzeugende $G_i$ . . . . .	92
6.7 Die Eindeutigkeit des Ergebnisses . . . . .	94
<b>7 Das post-Newtonscche Zweiteilchen-System in dritter Ordnung</b>	<b>98</b>
7.1 Lagrangefunktion . . . . .	98
7.2 Hamiltonfunktion . . . . .	99
7.3 Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$ . . . . .	101
7.4 Die Erzeugende $G_i$ . . . . .	103
7.5 Die Eindeutigkeit des Ergebnisses . . . . .	105
<b>Fazit</b>	<b>107</b>
<b>A Bemerkung zu Ref. [1]</b>	<b>109</b>
<b>B Die 3pN-Lagrangefunktion in harmonischer Eichung</b>	<b>113</b>
<b>C Ableitung der Zwangsbedingungen (3pN)</b>	<b>116</b>
<b>D Die elementaren Dirac-Klammern (3pN)</b>	<b>118</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>
<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>124</b>
<b>Danksagung</b>	<b>125</b>

# Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch einen Artikel von P. Havas und J. Stachel [1]. In diesem werden näherungsweise explizit Poincaré-invariante relativistische Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden bis zur ersten Ordnung in Potenzen von  $\frac{1}{c^2}$  im Hamiltonformalismus behandelt. Insbesondere werden die Erzeugenden der Poincaré-Gruppe berechnet. Es wird auf einen späteren Artikel verwiesen, in dem spezielle Wechselwirkungen, die eine Wahl der Ortskoordinate als kanonische Koordinate erlauben, bis zur zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  auf analoge Weise behandelt werden sollen. Dieser Artikel ist nie erschienen.

Nach [2] enthalten Lagrangefunktionen, die forminvariant unter Poincaré-Transformationen sind und physikalisch relevante Systeme wechselwirkender Teilchen beschreiben, ab der zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  stets höhere Zeitableitungen  $q_\alpha^{(i)}$ ,  $1 < i \leq n$  der Ortskoordinaten. Da die höchsten Zeitableitungen in höheren Ordnungen von  $\frac{1}{c^2}$  auftreten, ist die Hesse-Matrix  $\frac{\partial^2 L}{\partial q_\alpha^{(n)} \partial q_\beta^{(n)}}$  auf dem Ring der Polynome in  $\frac{1}{c^2}$  nicht invertierbar. Man nennt solche Lagrangefunktionen singulär und von höherer Ordnung (in den Zeitableitungen).

Wir wollen für die post-Newtonischen Lagrangefunktion in harmonischer Eichung und die post-Coulombschen Lagrangefunktionen in Lorentz-Eichung (beide sind forminvariant unter Poincaré-Transformationen) unter Vernachlässigung dissipativer Terme den Übergang zum singulären Hamiltonformalismus höherer Ordnung durchführen (vgl. [3]). Die zugehörige symplektische Form auf dem reduzierten Phasenraum ist in Koordinaten geschrieben die Dirac-Klammer. Es soll gezeigt werden, dass ab der zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  gilt:

I. *Eine Wahl der Ortskoordinate als kanonische Koordinate ist nicht möglich.*

Für das post-Newtonische Zweiteilchen-System wollen wir bis zur dritten und für das post-Coulombsche Zweiteilchen-System bis zur zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  zeigen:

II. *Man kann infinitesimale Erzeugende verallgemeinerter kanonischer Transformationen finden, die eine Darstellung der Poincaré-Algebra bezüglich der Dirac-Klammer sind.*

III. *Mit der physikalischen Forderung, dass es sich bei diesen um die Erzeugenden von zeitlicher und räumlicher Translation, Drehung und spezieller Lorentztransformation handelt (Orts- und Impulskoordinaten also entsprechend transformieren), sind die Erzeugenden eindeutig bestimmt.*

Die expliziten Ausdrücke für die infinitesimalen Erzeugenden sollen für das post-Newtonische bzw. post-Coulombsche System bis zur dritten bzw. bis zur zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  bestimmt werden.

# Notation

## Allgemeine Bezeichnungen

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2}.$$

1pN-Näherung: erste post-Newtonssche Näherung.

2pN-Näherung: zweite post-Newtonssche Näherung.

usw.

1pC-Näherung: erste post-Coulombsche Näherung.

usw.

$f_{0pN/C}$  Funktion  $f$  in Newtonsscher/Coulombscher Näherung.

$f_{1pN/C}$  Funktion  $f$  in erster post-Newtonsscher/post-Coulombscher Näherung.

usw.

$f_{(0)}$  Funktion  $f$  bis zur nullten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  berechnet.

$f_{(1)}$  Funktion  $f$  bis zur ersten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  berechnet.

usw.

${}^n f$  n-te Ordnung (in  $\frac{1}{c^2}$ ) der Funktion  $f$ .

${}^n f_N$  n-te Ordnung einer post-Newtonsschen Größe.

${}^n f_C$  n-te Ordnung einer post-Coulombschen Größe.

Mannigfaltigkeit: endlichdimensionale  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit.

Ring der Polynome in  $\frac{1}{c^2}$  modulo Terme in  $\frac{1}{c^{2n+2}}$ :  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^{2n+2}}]$ .

## Indizes und Metrik

Signatur der Metrik:  $(-, +, +, +)$ .

Lorentz-Metrik:  $\eta_{\mu\nu}$ .

Metrischer Tensor:  $g_{\mu\nu}$ .

griechische Indizes:  $\eta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, \dots, 3$ .

lateinische Indizes:  $a, b$  Teilchennummern.

lateinische Indizes:  $i, j, k = 1, \dots, 3$  (gelegentlich wird  $k$  auch anders verwendet).

griechische Indizes:  $\alpha, \beta$  bezeichnen ein Paar  $(a, i)$ .

lateinische Indizes:  $k, l, m$ : geht jeweils aus dem Text hervor.

## Einheiten und Naturkonstanten

Es wird das cgs-System verwendet.

Lichtgeschwindigkeit:  $c \equiv 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ .

Newton'sche Gravitationskonstante  $G = 6.673\dots \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2} \text{ g}^{-1}$ .

Einstein'sche Gravitationskonstante  $\kappa = 2.076\dots \cdot 10^{-48} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^2 \text{ g}^{-1}$ .

## Ableitungen und Differentialoperatoren

Zeitableitungen: Kennzeichnung durch  $\dot{x}, \ddot{x}, \dots$  oder  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$

oder  $\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots$

Partielle Ableitungen:  $(\dots)_{,\mu}, \partial_\mu, \frac{\partial(\dots)}{\partial x_\mu}$ .

Kovariante Ableitungen:  $(\dots)_{;\mu}, \nabla_\mu$ .

Variationsableitung nach  $q(t)$ :  $\frac{\delta(\dots)}{\delta q}$ .

$$\square_\eta = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu.$$

$$\square_g = \nabla^\mu \nabla_\mu.$$

## Singulärer Lagrangeformalismus höherer Ordnung

Koordinaten:  $q_m, m = 1, \dots, f$ .

Lagrangefunktion:  $L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)})$ .

Unabhängige Variablen des Konfigurationsraumes:  $q_m, q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(2n-1)}$ .<sup>1</sup>

Dimension des Konfigurationsraumes:  $2n \cdot f$ .

Hesse-Matrix:  $H_{lm} = \frac{\partial^2 L}{\partial q_l^{(n)} \partial q_m^{(n)}}$ .

Anzahl der Zwangsbedingungen (constraints):  $K$ .

Dimension der Zwangsbedingungsfläche:  $g = 2n \cdot f - K$  Zwangsbedingungen:  $C_w$   
(vollständiger Satz:  $w = 1, \dots, K$ ).

---

<sup>1</sup>Man beachte die allgemein übliche Verwendung derselben Bezeichnung für die Zeitableitungen des Koordinatenvektors und der entsprechenden Variablen des Konfigurationsraumes.

Rang der Matrix H:  $\text{rk}H_{ab}$ .

### Singulärer Hamiltonformalismus höherer Ordnung

Koordinaten:  $q_m, q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(n-1)}$ ,  $m = 1, \dots, f$ .

Ostrogradski-Impulse:  $\Pi_{0m}, \dots, \Pi_{(n-1)m}$ .

Poisson- oder Ostrogradski-Klammer:  $\{.,.\}$ .

Anzahl der Zwangsbedingungen:  $K$ .

Zwangsbedingungen:  $\Phi_k$  (vollständiger Satz:  $k = 1, \dots, K$ ).

Zwangsbedingungen zweiter Klasse:  $\gamma_k$ .

Zwangsbedingungsfläche (constraint surface):  $\Gamma$ .

Matrix der Poisson-Klammern der Zwangsbedingungen:  $C_{kl}$  (Teil I),  $D_{\alpha\beta}$  (Teil II).

Dirac-Klammer:  $\{.,.\}^*$ .

Kanonisch konjugierte Koordinaten bezüglich  $\{.,.\}^*$ :  $Q_{ai}, P_{ai}$ .

Phasenraumfunktion  $F$ , ausgedrückt durch kanonische Koordinaten:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= F(q_m(Q, P), \dots, \Pi_{(n-1)m}(Q, P)) = F|_{q(Q, P), \Pi(Q, P)} \\ \{F, G\}^*|_{q(Q, P), \Pi(Q, P)} &= \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{Q, P} = \sum_{m=1}^{g/2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_m} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_m} - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_m} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_m}.\end{aligned}$$

$\tilde{F}$  n-te Ordnung der Funktion  $\tilde{F}$ .

Eine Gleichheit, die nur auf der Zwangsbedingungsfläche gilt, wird durch „ $\approx$ “ ausgedrückt.

### Infinitesimale Erzeugende

Zeittranslation:  $H$ .

Räumliche Translation:  $P_i$ .

Drehung:  $J_i$ .

Lorenztransformation:  $G_i$ .

Galileittransformation:  $G_{(0)i}$ .

Infinitesimale Erzeugende (verallgemeinerter) kanonischer Transformationen werden analog bezeichnet.

## Größen im Zweiteilchensystem

Massen der Punktteilchen:  $m_1, m_2$ .

Gesamtmasse:  $M = m_1 + m_2$ .

Ladungen der Punktteilchen:  $e_1, e_2$ .

Ortskoordinatenvektoren:  $x_1, x_2$ .

Abschnitte 1.3.3, 1.4.1, 1.4.2:  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ .

Geschwindigkeitskoordinatenvektoren:  $\dot{x}_1 \equiv x_1^{(1)}, \dot{x}_2 \equiv x_2^{(1)}$ .

Beschleunigungsvektoren:  $\ddot{x}_1 \equiv x_1^{(2)}, \ddot{x}_2 \equiv x_2^{(2)}$ .

Gewöhnliche Impulsvektoren:  $p_1, p_2$

Ostrogradski-Impulsvektoren:  $\Pi_{01}, \Pi_{02}; \Pi_{11}, \Pi_{12}$ .

Abstand der Punktteilchen  $r = |x_1 - x_2|$ .

$$n_{12} = \frac{x_1 - x_2}{r}, \quad n_{21} = \frac{x_2 - x_1}{r}.$$

Skalarprodukt zweier Vektoren  $u, v$ :  $(u \cdot v) = \sum_{j=1}^3 u_i v_i$ .

Kanonisch konjugierte Koordinaten bezüglich  $\{.,.\}^*$ :  $Q_{ai}, P_{ai}$ .

Vektoren dieser Koordinaten:  $Q_a, P_a$ .

$$\{F, G\}^*|_{q(Q, P), \Pi(Q, P)} = \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{Q, P} = \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_{ai}} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_{ai}} - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_{ai}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_{ai}}.$$

Lagrangesche Zwangsbedingungen:

$$-m_a x_\alpha^{(r)} + \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s B_{\alpha, r, s}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^3) \text{ oder } O(\varepsilon^4), \quad r = 2, 3$$

(Näheres in Abschnitt 6.2).

Hamiltonsche Zwangsbedingungen zweiter Klasse:  $\omega_{1\alpha} \equiv \omega_\alpha, \chi_{1\alpha} \equiv \chi_\alpha$ .

Matrix der Poisson-Klammern der Zwangsbedingungen:  $D_{\alpha\beta}$ .

# Teil I

## Theoretische Grundlagen

# Kapitel 1

## Post-Newtonsc $\ddot{e}$ e und post-Coulombsc $\ddot{e}$ e Langrangefunktionen

### 1.1 Motivation

#### 1.1.1 Dynamik in der Allgemeinen Relativitätstheorie

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird ein Körper durch einen verbundenen Teil der Raumzeit mit nicht verschwindendem Energie-Impuls-Tensor repräsentiert [4, S.484]. Beschäftigt man sich mit der Bewegung und Gravitationswellenabstrahlung von astrophysikalischen Objekten, werden diese Körper als räumlich kompakte<sup>1</sup> zeitartige „Weltröhren“ modelliert. Für die meisten so modellierten physikalisch relevanten Fälle sind aber keine exakten Lösungen der Einstein-Gleichung bekannt.

Einen möglichen Ausweg bietet die post-Newtonsc $\ddot{e}$ e Näherung: Mit ihr ist es möglich, durch Näherung der Einstein-Gleichung im Fall schwacher Felder und kleiner Geschwindigkeiten Mehrkörperprobleme in einer Art zu behandeln, die sich stark an die Newtonsc $\ddot{e}$ e Mechanik anlehnt: Die Körper können als Massenpunkte, genauer als Massenmonopole (bezüglich des Ruhesystems des einzelnen Körpers) beschrieben werden. Dies ist für Zweikörper-Systeme bis zur 3. post-Newtonsc $\ddot{e}$ e Ordnung (tatsächlich sogar bis 3.5pN) explizit durchgeführt wor-

---

<sup>1</sup>Der Schnitt des Trägers mit raumartigen Hyperflächen ist kompakt.

den. Man kann bis zu dieser Ordnung zeigen, dass auch kompakte Objekte mit starker Selbstgravitation (Neutronensterne, Schwarze Löcher) so beschrieben werden können, sofern die Abstände zwischen ihnen groß genug sind[5, S.80ff],[6]. Für die Massenpunkte werden im Rahmen der Näherung Bewegungsgleichungen gefunden, die die Beschleunigungen explizit als Funktionen von Ort und Geschwindigkeit angeben.

Ab 2.5pN setzt die Rückwirkung der Abstrahlung von Gravitationswellen ein. Die Gravitationswellen, die von Binärsystemen kompakter Objekte abgestrahlt werden, sollten von den im Bau befindlichen Gravitationswelleninterferometern (Geo600, LIGO, VIRGO,...) detektierbar sein, wodurch die Berechnung von Bewegungsgleichungen in höherer post-Newtonsscher Ordnung zusätzlich an Relevanz gewinnt.

Ab 4pN beginnt ein als Rückstreuung (back-scattering) bekannter Effekt: Abgestrahlte Gravitationswellen erzeugen neue Gravitationswellen, die wiederum die Quelle beeinflussen. Die Berechnung einer 4pN-Approximation der Einsteinschen Feldgleichung wird dadurch erheblich erschwert. Vollständig bekannt sind die Approximationen bis 3.5pN für zwei Punktquellen.

### 1.1.2 Hamilton-Formalismus in der Elektrodynamik

In der Elektrodynamik hängen die Kräfte an einem bestimmten Punkt aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Felder vom Bewegungszustand der Quellen zu einer früheren (retardierten) Zeit ab. Die üblichen Lagrange- und Hamiltonfunktionen hängen aber nur vom momentanen Bewegungszustand ab (Annahme einer direkten Wechselwirkung). Diese gewisse Unverträglichkeit der Hamiltonschen Formulierung mit der Lorentzinvianranz einer Theorie, die ja stets eine Retardierung nach sich zieht, manifestiert sich in dem folgenden von H. Leutwyler bewiesenen Satz [7], vgl. auch [8], [9]:

Für lorentzinvariante Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden ( $n$ -Teilchen-Systeme) gilt das *no-interaction-Theorem*: Es seien die Ortskoordinaten  $q_i$  und entsprechende Impulse  $p_i$  kanonische Koordinaten und  $H$ ,  $P_i$ ,  $J_i$  und  $G_i$  die Erzeugenden der Poincare-Gruppe bezüglich der Poisson-Klammer  $\{ \dots \}$ . Ist die Hamiltonfunktion lorentz invariant, so verschwindet die Beschleunigung aller Teilchen. Es handelt sich also stets um eine freie Theorie.

Für eine Lagrangefunktion kausal wechselwirkender Teilchen mit endlich vielen

Freiheitsgraden folgt aus exakter Poincaré-Invarianz, dass sie von unendlicher Ordnung sein muss, also zeitliche Ableitungen  $q^{(n)}(t)$  mit beliebig hohem  $n$  auftreten [10]. Aus mathematischer Sicht sind solche Lagrangefunktionen problematisch, da Konvergenz und damit Wohldefiniertheit des Ausdrucks nicht gesichert sind [11].

Durch entsprechende Wahl von Randbedingungen<sup>2</sup> kann man erreichen, dass ein System zweier geladener Teilchen zu keiner Zeit Energie emittiert (Feynman-Wheeler-Elektrodynamik) [12]. Das System ist dann konservativ und man kann eine nicht explizit zeitabhängige Lagrangefunktion als Entwicklung in  $c^{-n}$  aufschreiben. Durch Vernachlässigen höherer Terme gelangt man zur post-Coulombschen Näherung [13].

Mit Hilfe dieser Entwicklung gelingt es auf einfache Weise, relativistische Korrekturen in die Lagrange-Funktion der Wechselwirkung geladener Teilchen einzubringen. Bekanntestes Beispiel ist die Darwin-(1pC-)Lagrangefunktion. Die Quantisierung bereitet keinerlei Probleme und führt zur Breit-Gleichung und damit zur Erklärung der Feinstruktur-Aufspaltung beim Wasserstoff-Atom[14].

Bei der 1.5ten post-Coulombschen-Ordnung (1.5pC) setzen üblicherweise Verluste durch Dipolstrahlung ein [15, S. 209]. Bei Annahme von  $e_i/m_i = e_j/m_j$  (z.B. stoßende Protonen oder entsprechende Atomkerne) treten Strahlungs-Verluste aber erst bei 2.5pC auf [16],[15]. Physikalisch sinnvoll ist die Verwendung der Feynman-Wheeler-Elektrodynamik also nur bis 2.5pC.

## 1.2 Eichungen in Allgemeiner Relativitätstheorie und Elektrodynamik

### 1.2.1 Unterbestimmtheit von $g_{\mu\nu}$

Die Bestimmungsgleichung für die Grundgröße der Gravitationstheorie, das metrische Feld  $g_{\mu\nu}$ , ist die Einstein-Gleichung

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

---

<sup>2</sup>Allerdings sind diese Randbedingungen nicht physikalisch.

mit

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.2)$$

und dem Einstein-Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Neben den algebraischen Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  (die die Anzahl der möglichen unabhängigen Komponenten auf 20 einschränken), gibt es auch eine differentielle Symmetrie (die die relativen Werte der Tensorkomponenten an verschiedenen Punkten einschränkt). Ihrer Wichtigkeit wegen trägt sie einen eigenen Namen, *Bianchi-Identität* (z. B. [17, S. 81], [18, S. 146]):

$$R_{\rho\sigma[\mu\nu;\lambda]} \equiv 0. \quad (1.4)$$

Dabei bedeutet [...], dass über die geraden Permutationen der eingeschlossenen Indizes summiert wird. Für den Ricci-Tensor  $R_{\sigma\nu} = R^\rho_{\sigma\rho\nu}$  bzw. den Einstein-Tensor lässt sich damit die reduzierte Bianchi-Identität

$$(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\nu)_{;\mu} = G^\mu_{\nu;\mu} \equiv 0 \quad (1.5)$$

ableiten. Damit ist einerseits (via Einsteingleichung) die Energie- und Impulserhaltung ( $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ ) in der gekrümmten Raumzeit gesichert, andererseits impliziert die Eigenschaft (1.5) von  $G^\mu_\nu$ , dass nur sechs der zehn algebraisch unabhängigen Gleichungen (1.1) wirklich unabhängig sind. Für die zehn Freiheitsgrade des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  stehen also nur sechs Bestimmungsgleichungen zur Verfügung, die Einsteingleichung bestimmt nur Äquivalenzklassen von metrischen Feldern.

Die verbliebenen Freiheitsgrade gewährleisten die Freiheit der Koordinatenwahl. Erfüllt eine Metrik  $g$  die Einsteingleichung, so gilt dies in jedem Koordinatensystem. Die Einsteingleichung ist gegenüber Koordinatentransformationen forminvariant: Erfüllen  $g_{\mu\nu}$  und  $g_{\mu'\nu'}$

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

so gehen sie in der gleichen funktionalen Form in die Einsteingleichung ein. Tatsächlich besitzt  $g$  damit genau vier Freiheitsgrade: Man kann vier Komponenten von  $g_{\mu'\nu'}$  beliebig wählen und Gleichung (1.6) als Differentialgleichung für  $x^{\mu'}(x^\sigma)$

auffassen. Damit erhält man ein Koordinatensystem, in dem  $g$  die gewünschten vier Komponentenfunktionen besitzt.

Da ein Diffeomorphismus  $\Phi$ , der den Riemannschen Raum auf sich abbildet, lokal als einfacher Karten- oder Koordinatensystemwechsel interpretiert werden kann, resultiert aus der lokalen Freiheit der Wahl des Koordinatensystems eine globale Eichinvarianz unter der Diffeomorphismengruppe des Riemannschen Raums.

### 1.2.2 Die harmonische Eichung

Die vier verbliebenen Freiheitsgrade des metrischen Tensors können durch Eichbedingungen fixiert werden. Das ist gleichbedeutend mit der Wahl eines bestimmten Koordinatensystems. Häufig lässt sich die Lösung der Feldgleichungen mit einer dem Problem angepassten Wahl stark vereinfachen. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten post-Newtonischen Größen sind durchgehend in der *harmonischen* (oder *de Donder-*) Eichung gegeben. Die Eichbedingungen sind:

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \iff (\sqrt{-g}g^{\lambda\nu})_{,\nu} = 0 \quad (1.7)$$

Diese (nicht kovarianten) Bedingungen sind äquivalent zu

$$\square_g x^\mu = 0 \quad (1.8)$$

mit dem kovarianten d'Alembertoperator  $\square_g = \nabla^\mu \nabla_\mu$ : Da  $x^\mu$  nicht die Komponenten eines Vektorfeldes sind, sondern lediglich vier reelle Funktionen (skalare Felder), folgt  $x^\mu_{,\nu} = x^\mu_{,\nu}$  und damit

$$0 = \square_g x^\mu \quad (1.9)$$

$$= g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma x^\mu - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda x^\mu \quad (1.10)$$

$$= -g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu. \quad (1.11)$$

Um zu zeigen, dass diese Eichung zugänglich ist (dass also immer ein Repräsentant der Eichbedingung genügt), transformiert man  $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  in ein Koordinatensystem  $x^{\mu'}$ , in dem die Bedingung (1.7) erfüllt sein soll. Nach Verjüngen mit  $g^{\mu'\nu'}$  und Einsetzen von (1.7) in gestrichenen Koordinaten ergibt sich eine partielle

Differentialgleichung zweiter Ordnung [18, S.162]

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \quad (1.12)$$

aus der im Prinzip immer entsprechende Koordinaten  $x^{\mu'}(x^\alpha)$  ermittelt werden können. Eine affin-lineare Koordinatentransformation

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = A_{\mu'}^\mu x^\mu + a^{\mu'} \quad (1.13)$$

respektiert die Eichung, wie man mit der Form (1.8) der Eichbedingung leicht sieht:  $\square$  ist unter der Diffeomorphismengruppe des Riemannschen Raumes invariant (also insbesondere unter (1.13)) und als Ableitungsoperator auch linear, so dass mit (1.8) auch  $\square x^{\mu'} = 0$  gilt.

Andere in der post-Newtonschen Näherung verwendete Eichungen sind die ADM-Eichung [19, S.227ff] oder die Standard-post-Newtonische-Eichung [4, S. 272f]

### 1.2.3 Unterbestimmtheit von $A^\mu$

Eine analoge Situation findet sich in der Elektrodynamik (und in anderen Eichtheorien). Die Grundgröße der Elektrodynamik ist, wie uns die Quantenmechanik lehrt (Aharonov-Bohm-Effekt, Quantisierung des magnetischen Flusses), nicht der elektromagnetische Feldtensor  $F_{\mu\nu}$ , sondern das Viererpotential  $A^\mu$ . In den Feldgleichungen (z. B. [20, S. 150], [21, S. 644])

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (1.14)$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \quad (1.15)$$

mit dem dualen Feldtensor

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (1.16)$$

erscheint  $A^\mu$  nur als

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.17)$$

Die Eichtransformation

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (1.18)$$

geht also in die Feldgleichungen gar nicht ein. Damit bestimmen die Maxwell-Gleichungen nur  $A^\mu$  modulo einer Eichtransformation, also eine Äquivalenzklasse von Viererpotentialen. Alle physikalischen Aussagen sind dabei unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, d. h. des speziellen  $A^\mu$ . Das Analogon zur allgemeinen Kovarianz der Einstein-Gleichung ist also nicht die Lorentzinvarianz der Maxwell-Gleichungen sondern die Eichinvarianz unter (1.18).

### 1.2.4 Die Lorentz-Eichung

Bekannte Eichbedingungen in der Elektrodynamik sind die Coulombeichung  $\partial_i A^i = 0$  und die lorentzkovariante *Lorentz*-Eichung<sup>3</sup>

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.19)$$

in der die post-Coulombsche Lagrangefunktion angegeben wird. Auch diese Eichung ist zugänglich, wie man leicht zeigt: Wir haben ein  $\chi$  zu wählen, so dass für  $A'^\mu$  (1.19) gilt. Für  $\chi$  ergibt sich daraus die Differentialgleichung

$$0 = \partial_\mu A'^\mu \quad (1.20)$$

$$= \partial_\mu A^\mu + \square_\eta \chi, \quad (1.21)$$

mit dem flachen d'Alembertoperator  $\square_\eta = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ . Ein solches  $\chi$  lässt sich für hinreichend glattes  $A^\mu$  stets finden, die offensichtlich vorhandene Resteichfreiheit erlaubt noch eine zusätzliche beschränkte Eichtransformation

$$\chi \longrightarrow \chi' = \chi + \Lambda \quad (1.22)$$

mit einer Lösung der homogenen Wellengleichung  $\square_\eta \Lambda = 0$ . Reduziert man die inhomogenen Maxwellgleichungen (1.14) mit Hilfe der Lorentz-Eichung, nehmen sie die Form einer inhomogenen Wellengleichung

$$\square_\eta A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (1.23)$$

---

<sup>3</sup>Gelegentlich findet man auch die Bezeichnung Lorenz-Eichung (nach ihrem Entdecker, L. V. Lorenz) [21, S. 279].

an. (Die homogenen Maxwellgleichungen sind wegen der Antisymmetrie des  $\varepsilon$ -Pseudotensors und (1.17) für beliebiges  $A^\mu$  identisch erfüllt.)

## 1.3 Ableitung der post-Newtonischen Lagrangefunktion

### 1.3.1 Hadamard-Regularisierung

Ab der 1pN-Näherung [18, S. 212], [4, S. 266, S. 566] ist die Regularisierung der in den post-Newtonischen Näherungen auftretenden Terme nicht mehr evident. Insbesondere bei punktförmigen Quellen ergeben sich komplizierte Divergenzen der Integrale. Um diesen Integralen dennoch einen Sinn zu geben, wendet man die Hadamardsche Regularisierungsmethode [22], [23], [24] an<sup>4</sup>:

Es sei eine Funktion  $F(x)$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  gegeben, die an endlich vielen Punkten singulär und sonst  $C^\infty$  ist. An den singulären Punkten  $q$  lasse sie eine potenzreihenähnliche Entwicklung zu:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F(x) = \sum_{a_0 \leq a \leq n} r_q^a f_{q,a}(\mathbf{n}) + o(r^n) \quad (1.24)$$

Dabei sind die Exponenten  $a$  reell, diskret und durch  $a_0$  nach unten beschränkt. Dann ist der Hadamardsche „partie finie“ der „endliche Teil“ bei einem beliebigen Punkt  $p$  durch

$$(F)_p = \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} f_{p,0}(\mathbf{n}) \quad (1.25)$$

gegeben. Bei nichtsingulären Punkten reduziert sich das offensichtlich auf  $f(p)$ . Mit Hilfe dieser Definition ist es auch möglich, divergenten Integralen einen Wert zuzuweisen. Dazu nimmt man an, dass die Funktion  $F(x)$  über  $\mathbb{R}^3$  integrierbar ist, wenn man kleine Kugeln mit Mittelpunkt an den Singularitäten ausnimmt. Die „gefährlichen“ Teile der Funktion mit Exponenten  $a \leq -3$  werden dann im Integranden so abgezogen, dass man am Ende den Radius der Kugeln gegen null gehen lassen kann, ohne dass das Integral divergiert. So wird der Term mit  $a = -3$  beim Punkt  $q$  durch Addition von  $4\pi \ln(s/s_q)(r_q^3 F)_q$  neutralisiert (mit beliebigem

---

<sup>4</sup>Allerdings ist diese Methode nicht ganz zufriedenstellend, da unbestimmte Terme verbleiben. Eine vollständige Bestimmung gelingt mit dimensionaler Regularisierung [25], [26].

$s_q$ ). Auf diese Weise erhält man ein wohldefiniertes Integral [24], [23],

$$\text{Pf} \int d^3 \mathbf{x} F. \quad (1.26)$$

Die temperierten Distributionen, die auf dem Raum der Testfunktionen  $\mathcal{C}_0^\infty$  erklärt sind, kann man mit Hilfe der vorangegangenen Definitionen auf den Raum der Funktionen  $F(\mathbf{x})$  erweitern. So ist eine natürliche Erweiterung der Delta-Distribution zu einer sog. „Pseudofunktion“  $\text{Pf} \delta_p$  durch

$$\text{Pf} \int d^3 \mathbf{x} \delta_p F := (F)_p \quad (1.27)$$

gegeben. Wie für die Distributionen kann man für solche Pseudofunktionen auch eine Ableitung definieren.

Die Hadamard-Regularisierung wird auf einem 3-dimensionalen euklidischen Raum angewendet, der als raumartige Hyperfläche des vierdimensionalen Riemannschen Raumes mit konstantem  $x^0$  angesehen werden kann. Solch eine Wahl zeichnet aber ein Koordinatensystem aus, so dass die Poincaré-Invarianz der harmonischen Eichung und des Ansatzes (1.33) (siehe unten) nicht erhalten bleibt. Abhilfe schafft eine Modifikation, die im wesentlichen daraus besteht, dass man die Hadamard-Regularisierung im momentanen Ruhesystem des jeweiligen Teilchens (das durch eine Lorentztransformation erreicht werden kann) durchführt und danach durch die inverse Lorentztransformation wieder ins ursprüngliche System zurückkehrt. Die durch diese *Lorentz-Regularisierung* gewonnenen Funktionswerte bezeichnet man mit eckigen Klammern,  $[F]_p$ , die Entsprechung zu  $\text{Pf} \delta_p$  mit  $\text{Pf} \Delta_p$ . Da nun die Regularisierungsvorschrift für alle Koordinatensysteme, die durch Lorentztransformationen auseinander hervorgehen, identisch ist, bleibt die Lorentzinvarianz erhalten [24].

### 1.3.2 Das Problem der Quellen

Die Quelle des Gravitationsfeldes ist der Energie-Impulstensor  $T^{\mu\nu}$ . „Dieser [...] umfasst alle physikalischen Anteile, die im Sinne der Feldgleichungen gravitierend wirken.“ [27, S. 384]. Darunter fallen nicht allein die Massendichte (wie in der Newtonschen Feldgleichung), sondern auch der Impuls und der Impulsstrom der Materie, der Druck und Energieformen wie Wärme- oder Strahlungsenergie. Ein

häufig für astrophysikalische Probleme verwendetes Modell ist das der neutralen, kalten, idealen Flüssigkeit. Eine solche besitzt den Energie-Impulstensor

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p(g_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha u_\beta}{c^2}) \quad (1.28)$$

mit der Vierergeschwindigkeit  $u^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ , der Ruhemassendichte  $\rho$  (Ruheenergiedichte/ $c^2$ ) und dem Druck  $p$ , sowie einer Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$ , die die Beziehung von Druck und Ruheenergiedichte angibt [4, S. 168], [27, S. 428]. Für die post-Newtonssche Näherung ist es interessant zu prüfen, welcher Ordnung in  $c^2$  die einzelnen Komponenten sind. Es liegt nahe anzunehmen, dass für kleine Geschwindigkeiten und Massen  $\rho$  und  $p$  von der Ordnung  $c^0$  (oder kleiner) sind. Dann ergibt sich wegen der Annahme kleiner Geschwindigkeiten und  $u^\alpha u_\alpha = -c^2$ :

$$T_{00} = O(c^2) \quad (1.29)$$

$$T_{0i} = O(c^1) \quad (1.30)$$

$$T_{ij} = O(c^0). \quad (1.31)$$

Energie-Impulstensoren mit einer solchen Dimensionierung bezeichnet man als „weakly stressed“.

In der Newtonsschen Gravitationsphysik ist das Finden von Lösungen für Systeme ausgedehnter Körper in vielen Fällen aus folgenden Gründen möglich [5, S. 63]:

- a) Das Gravitationsfeld ist als Funktion der Massenverteilung linear, deshalb können die Beiträge einzelner Teilchen (oder Volumenelemente) unterschieden und das Eigenfeld getrennt vom äußeren Feld betrachtet werden.
- b) Kräfte im Innern von Körpern heben sich aufgrund des Prinzips von actio=reactio auf. Dies erlaubt die Definition eines Schwerpunktes und die Vernachlässigung des Eigenfeldes bei der Bewegung.
- c) Das Feld sphärisch symmetrischer Massenverteilungen hat im Außenraum stets dieselbe Struktur, egal wie die radiale Verteilung explizit aussieht.

In größerer Entfernung bleibt also praktisch nur noch die Masse und die zentrale Weltlinie eines näherungsweise kugelsymmetrischen Körpers sichtbar („Auslösungsprinzip“ (effacement-principle) oder plakativer „Grinsekatten-Prinzip“ - das zurückbleibende „Grinsen“ entspricht der Masse [5, S. 86f]), eine Rotation kann durch Einführung eines Spins berücksichtigt werden. Man kann daher solche Körper gut durch einen Massenpunkt gleicher Masse auf der zentralen Weltlinie

ersetzen.

Bekanntlich hängt auch die äußere Schwarzschild-Lösung der Einstein-Gleichung nur von einem Parameter  $M$ , der asymptotisch mit der Newtonschen Masse des Körpers übereinstimmt, ab und nicht von der radialen Massenverteilung. Da die Einstein-Theorie nichtlinear ist, können daraus aber keine Schlüsse auf das allgemeine Verhalten von zwei oder  $n$ -Körperproblemen mit Körpern vergleichbarer Massen gezogen werden. Tatsächlich liefert die post-Newtonssche Entwicklung des Zwei-Körper-Problems Hinweise darauf, dass die Bewegung zweier Körper vergleichbarer Massen keine Ähnlichkeit mit der eines Testteilchens im Schwarzschild-Feld besitzt [28]. Zusätzlich wirkt sich das Eigenfeld und die innere Struktur auf das äußere Feld aus.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist auch das Modellieren von massiven punktförmigen Quellen der Gravitation eigentlich nicht möglich. Die Ausdehnung eines solchen Teilchens ist selbstverständlich kleiner als sein Schwarzschild-Radius, weshalb die Dynamik schnell in einer Singularität enden würde.

Es stellt sich aber die Frage, inwieweit das Auslöschungsprinzip in der post-Newtonsschen Näherung über die 0-te Näherung hinaus gilt. Dazu gibt T. Damour in [5, S.80] eine physikalische Begründung, die als „*Dominante Schwarzschild Bedingung*“ bekannt ist. Das Auslöschungsprinzip gilt damit mindestens bis zur 2.5. post-Newtonsschen Ordnung. Indirekt wird mit einer kürzlich erschienenen Arbeit von Y. Itoh [6] gezeigt, dass dies sogar bis 3pN der Fall ist, indem in einer für kompakte Objekte gültigen Näherung dieselbe 3pN-Bewegungsgleichung abgeleitet wird, wie sie P. Jaranowski, G. Schäfer [29], L. Blanchet, G. Faye [23] und vollständig T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer [25], L. Blanchet, T. Damour, G. Esposito-Farese [26] erhalten haben.

Dies erlaubt es, bis 3pN statt Energie-Impulstensoren für ausgedehnte Massendichteveilungen (für die die auftretenden Integrale oft nicht geschlossen lösbar wären) punktförmige Massenverteilungen anzunehmen, die in den Integralen als  $\delta$ -Pseudofunktionen erscheinen und eine Lösung der Integrale erlauben. Daher wird bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen in 3pN von L. Blanchet und G. Faye [23] in harmonischer Eichung der lorentzinvariante Energie-Impulstensor

$$T_{particle}^{\mu\nu} = m_1 c \frac{v_1^\mu v_1^\nu}{\sqrt{-[g_{\rho\sigma}]_1 v_1^\rho v_1^\sigma}} \text{Pf} \left( \frac{\Delta_1}{\sqrt{g}} \right) + 1 \leftrightarrow 2 \quad (1.32)$$

(mit der Koordinatengeschwindigkeit  $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ ) benutzt, der eine entsprechende Verallgemeinerung des Konzepts der Punktmasse darstellt [24] (Eine etwas andere Verallgemeinerung benutzen G. Schäfer und P. Jaranowski [29]).

### 1.3.3 post-Newtonische Approximation der Einstein-Gleichung

Wie bereits erwähnt (vgl. 1.1.1) sind post-Newtonische- und post-Minkowskische Näherung ursprünglich Näherungen für schwache Gravitationsfelder. Man geht davon aus, dass die gotische Metrik (Dichte des metrischen Tensors)  $\mathbf{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$  (oder auch die Metrik selbst) im wesentlichen die Minkowski-Metrik mit einer kleinen Korrektur  $|h^{\mu\nu}| \ll 1$  ist:

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \quad (1.33)$$

Die harmonische Eichung lautet dann

$$\partial_\nu \mathbf{g}^{\mu\nu} = \partial_\nu h^{\mu\nu} = 0 \quad (1.34)$$

und die Einsteinsche Feldgleichung lässt sich als

$$\square_\eta h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \quad (1.35)$$

schreiben [23], [30][27, S.383]. Dabei ist

$$\Lambda^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)t_{LL}^{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\mu\sigma}\partial_\sigma h^{\nu\rho} - h^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\mu\nu} \quad (1.36)$$

und  $t_{LL}^{\mu\nu}$  der Landau-Lifschitz-Energie-Impuls-Pseudotensor [15, S. 336],  $\Lambda^{\mu\nu}$  enthält also nur Terme, die zumindest quadratisch in  $h^{\mu\nu}$  sind.

Für entsprechend schwache Gravitationfelder erwarten wir dann auch, dass das Virialtheorem

$$\overline{E_{kin}}^t = \frac{1}{2}\overline{E_{pot}}^t \quad (1.37)$$

der Newtonschen Gravitationstheorie für die über die Zeit gemittelte kinetische Energie  $\overline{E_{pot}}^t$  und die über die Zeit gemittelte potentielle Energie  $\overline{E_{kin}}^t$  näherungsweise erfüllt ist. Damit kann man für die Größenordnungen von typischen

Geschwindigkeiten  $\bar{v}$ , Massen  $\bar{m}$  und Abständen  $\bar{r}$

$$\left(\frac{\bar{v}^2}{c^2}\right) \approx \left(\frac{\bar{v}^2 t}{c^2}\right) \approx \left(\frac{G\bar{m}}{\bar{r}}\right) \ll 1 \quad (1.38)$$

folgern [18, S.212], [4, S.266]. (Eine genauere Darstellung, die zwischen inneren und äußeren Maßstäben trennt, findet sich in [31, S. 149].)

Es scheint also sinnvoll, die Störung zusätzlich (formal) nach  $\varepsilon = \frac{1}{c^2}$  zu entwickeln. Nimmt man als Randbedingung an, dass vor Einschalten einer Quelle keine Strahlung existiert (salopper ausgedrückt: dass keine Strahlung einfällt), so ist die Lösung einer Wellengleichung durch das retardierte Integral

$$\square_{\eta,ret}^{-1} f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}' dt'}{-4\pi} \frac{f(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) \quad (1.39)$$

bzw. (nach Ausführen der Zeitintegration) durch

$$\square_{\eta,ret}^{-1} f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{-4\pi} \frac{f\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.40)$$

gegeben. (Zur besseren Unterscheidung von Vierervektoren werden Dreiverektoren in diesem und im folgenden Abschnitt fett gedruckt.) Damit kann (1.35) als

$$h^{\mu\nu} = \square_{\eta,ret}^{-1} \left[ \frac{16\pi G}{c^4} (-g) T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \right] \quad (1.41)$$

geschrieben werden. Diese Form erlaubt eine iterative Berechnung der höheren post-Newtonischen Approximationen, die mit Hilfe der in Abschnitt 1.3.1 beschriebenen Hadamard-Regularisierung bei Verwendung der Punktquelle (1.32) tatsächlich geschlossen durchführbar ist. Die Bewegungsgleichungen können dann aus der Erhaltung des metrischen Tensors

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (1.42)$$

gewonnen werden [23].

Der konservative Anteil der Bewegungsgleichungen erlaubt eine Lagrangesche Formulierung, die zugehörige Lagrangefunktion kann durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten (siehe unten) gewonnen werden [32].

Die so ermittelte Lagrangefunktion für 3pN enthält noch einen unbekannten Koeffizienten. Die vollständige Lagrangefunktion kann mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung [25] und einer anderen Methode gewonnen werden, die ADM- anstatt der harmonischen Koordinaten benutzt: P. Jaranowski und G. Schäfer [29] gehen von einem Routh-Funktional für Feld und Materie aus ( $R[q, p, h_{\mu\nu}, \dot{h}_{\mu\nu}]$ ) und gewinnen durch Eliminieren der Feldvariablen eine Hamilton-Funktion höherer Ordnung für die Teilchen. Die dissipativen 2.5pN-Terme tauchen dabei als explizit zeitabhängige Terme auf. Die Umrechnung von ADM- auf harmonische Koordinaten erfolgt durch eine Kontakttransformation [33]. In einem kürzlich erschienenen Artikel von L. Blanchet, T. Damour, G. Esposito-Farese [26] wird die volle Bewegungsgleichung mit dimensionaler Regularisierung in harmonischer Eichung abgeleitet.

## 1.4 Ableitung der post-Coulombschen Lagrangefunktion

### 1.4.1 Die Liénard-Wiechertschen Potentiale

Wie schon erwähnt (Abschnitt 1.2.4) führen die Maxwellgleichungen in Lorentz-Eichung auf eine Wellengleichung für  $A^{\mu\nu}$  (1.23), vgl. auch (1.35). Nimmt man als Randbedingung an, dass keine Strahlung einfällt, so ergeben sich die Lösungen wieder durch das retardierte Integral (1.39). Damit kann eine Lösung von (1.23) aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_{ret}^\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{x}' dt' \frac{j^\mu(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{j^\mu\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

In der Elektrodynamik kann man ausgedehnte Quellen durch punktförmige (eventuell mit Spin) approximieren. (Die Eigenschaften a) und c) des Newtonschen Gravitationsfeldes im Abschnitt 1.3.2 gelten ja auch hier.) Ein solcher Punkt mit Ladung  $e$  besitzt eine Viererstromdichte [21, S. 764]

$$j^\mu(x, t) = ev_0^\mu(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \quad (1.44)$$

mit  $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma} u^\mu = \frac{1}{\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ . Setzt man dies in (1.43) ein so erhält man unter Benutzung von

$$\int dt' g(t') \delta(f(t')) = \left[ \frac{g(t')}{df/dt'} \right]_{f(t')=0} \quad (1.45)$$

(für einfache Nullstellen von  $f$ ) die Liénard-Wiechertschen Potentiale:

$$A_{ret}^\mu(x^\alpha) = e \frac{v^\mu(t_{ret})}{v^\alpha(t_{ret})[x_\alpha - x_{0\alpha}(t_{ret})]} \quad (1.46)$$

mit der retardierten Zeit

$$t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}. \quad (1.47)$$

Die avancierten Potentiale zur Randbedingung, dass keine Strahlung ausfällt (genauer: dass nach Abschalten der Quelle bzw. Senke keine Strahlung übrigbleibt), haben eine vollkommen analoge Form, nur dass statt  $t_{ret}$  in (1.46) die avancierte Zeit

$$t_{av} = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (1.48)$$

einzusetzen ist.

### 1.4.2 Die post-Coulombschen Bewegungsgleichungen

Die retardierten und avancierten Potentiale können nun in eine Taylorreihe um  $t$  entwickelt werden. Am einfachsten ist es, dafür wieder von  $A_{ret}$  (1.43) auszugehen:

$$A_{ret}^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n j^\mu(\mathbf{x}', t) \left( -\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)^n. \quad (1.49)$$

Die Integration kann man wegen des kompakten Trägers des Integranden (unter Annahme hinreichender Konvergenz der Reihe) mit einer Punktladung (1.44) ausführen und erhält:

$$A_{ret}^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{c \partial t} \right)^n v_0^\mu(t) (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|)^{n-1}. \quad (1.50)$$

Dies ist im Prinzip eine zu (1.46) völlig äquivalente Darstellung [11].

Für die avancierten Potentiale erhält man denselben Ausdruck nur ohne „–“ vor der partiellen Zeitableitung.

Durch Addition des halben  $A_{ret}^\mu(x, t)$  und  $A_{av}^\mu(x, t)$  ergibt sich ein Potential, das

nur noch gerade Potenzen der Zeitableitungen enthält:

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{c} \sum \frac{1}{(2n)!} \left( -\frac{\partial}{c\partial t} \right)^{2n} u_0^\mu(t) (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|)^{2n-1} \quad (1.51)$$

Dieses Potential ist zeitumkehrsymmetrisch und lässt konservative Bewegungsgleichungen zu (erfüllt aber weder die Randbedingung, dass keine Strahlung einfällt, noch die, dass keine Strahlung ausfällt).<sup>5</sup> Für ein zwei-Teilchen-System mit diesen Randbedingungen treten keine Rückwirkungseffekte (Strahlungsdämpfung) auf. Das zweite Teilchen absorbiert genau die Strahlung, die das erste Teilchen aufgrund seiner Beschleunigung emmitiert und umgekehrt, das Feld hat nur eine vermittelnde Funktion. Die Kraft, die ein Teilchen erfährt, ist damit die Lorentzkraft hervorgerufen durch das Feld des anderen Teilchens [11],[12],[13]. Daher kann als Lagrangefunktion eines Teilchens bis in beliebige Ordnung

$$L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -mc^2 \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{e}{c} v_\mu A^\mu \quad (1.52)$$

mit  $v^\mu = (c, \dot{\mathbf{x}})$  benutzt werden [20, S. 227], [21, S. 670ff]. Betrachten wir zunächst die Wirkung auf das Teilchen 1: Das Potential werde von einem Teilchen mit Ladung  $e_2$  am Ort  $\mathbf{x}_2$  erzeugt und wirke auf ein Teilchen mit Ladung  $e_1$  am Ort  $\mathbf{x}_1$ . Das erzeugte Potential wird als äußeres Potential angesehen. Die explizit zeitabhängige Lagrangefunktion für das Teilchen 1 erhält man durch Einsetzen von (1.51) in (1.52) [11]:

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t) &= -m_1 c^2 \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_1^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - e_1 e_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{D_2^{2n}}{c^{2n}} \left( 1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t)}{c^2} \right) (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2(t)|)^{2n-1} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Dabei ist  $D_2$  eine Zeitableitung, die nur die Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{x}_2(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2(t)$ , usw. berücksichtigt<sup>6</sup>, aber nicht auf  $\mathbf{x}_1$  wirkt, also

$$D_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dx_2^{(n)}}{dt} \frac{\partial}{\partial x_2^{(n)}} \quad (1.54)$$

---

<sup>5</sup>Die Differenz der retardierten und der avancierten Greensfunktion berücksichtigt dagegen nur die nichtkonservativen Anteile. Man bezeichnet sie als Strahlungsfelder [21, S. 711].

<sup>6</sup>An dieser Stelle könnte man auch noch  $D_2 = \frac{\partial}{\partial t}$  schreiben.

$(f^{(n)})$  bezeichnet stets die n-te Zeitableitung von  $f(t)$ .

Ein analoger Ausdruck ergibt sich für das Teilchen 2 im Feld des Teilchens 1.

Man kann nun aufgrund des quadratischen Aufretens der Zeitableitungen (Zeitumkehrsymmetrie!) folgern, dass es sich um ein konservatives System handelt und eine Lagrangefunktion suchen, die die Bewegung beider Teilchen beschreibt, sich aber, wenn man die Bewegung des einen Teilchens als gegeben und explizit zeitabhängig ansieht, auf (1.53) zuzüglich eines unwichtigen rein zeitabhängigen Summanden reduziert. Dazu beachtet man zunächst:  $d/dt = D_1 + D_2$ . Man erhält:

$$\begin{aligned} D_2^{2p} &= D_2^{2p-1} \left( \frac{d}{dt} - D_1 \right) = D_2^{2p-2} \left( \frac{d}{dt} D_2 - D_1 D_2 \right) = \dots \\ &= (-1)^p (D_1 D_2)^p + \text{totale Zeitableitungen} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Damit kann (eigentlich nur für eine endliche Summe über  $n$ ) eine zu (1.53) äquivalente Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \ddot{\mathbf{x}}_1, \dots, t) &= -m_1 c^2 \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_1^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &- e_1 e_2 \sum \frac{1}{(2n)!} \frac{(-D_1 D_2)^n}{c^{2n}} \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t)}{c^2} \right) (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2(t)|)^{2n-1} \end{aligned} \quad (1.56)$$

aufgeschrieben werden. Dies ist prinzipiell eine Lagrangefunktion höherer Ordnung. Der Ausdruck ist aber nur für endlich viele Glieder mathematisch wohldefiniert, im Falle einer unendlichen Summe über  $n$  erhalten wir einen Ausdruck dessen Konvergenzverhalten unklar ist. Sieht man darüber hinweg, kann man ausgehend von (1.56) eine Lagrangefunktion für beide Teilchen aufstellen [11]:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots) &= -m_1 c^2 \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_1^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} - m_2 c^2 \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_2^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &- e_1 e_2 \sum \frac{1}{(2n)!} \frac{(-D_1 D_2)^n}{c^{2n}} \left( 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}}_2}{c^2} \right) (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^{2n-1}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Eine Beschreibung physikalischer Systeme ist mit diesem Formalismus (wie schon in 1.1.2 erwähnt) möglich, wenn die Entwicklung nach Termen in  $\varepsilon = 1/c^2$  (1pC) bzw. im Falle  $e_1/m_1 = e_2/m_2$  nach Termen in  $\varepsilon^2 = 1/c^4$  (2pC) abgebrochen wird. Die Dipolabstrahlung ist proportional zu  $1/c^3$  (1.5pC), tritt also in 1pC-Näherung

noch nicht auf und ist im Falle  $e_1/m_1 = e_2/m_2$  für kleine Geschwindigkeiten<sup>7</sup> unterdrückt [15, S. 209]. In diesen Fällen tritt bei physikalischen Randbedingungen erst in 2.5pC Strahlungsrückwirkung auf und das Zweiteilchen-System ist bis zu dieser Ordnung durch (1.57) beschreibbar.

Der Abbruch der Reihe in der Ordnung  $npC$  entspricht dem Arbeiten auf dem Ring der reellen Polynome in  $\varepsilon$  modulo Terme der Ordnung  $\varepsilon^{n+1}$ , also  $\mathbf{R}[\varepsilon]/[\varepsilon^{n+1}]$ . Auch wenn die Konvergenz der Reihe (1.57) nicht klar ist, erscheint es physikalisch sinnvoll anzunehmen, dass die so gewonnenen Ausdrücke für Geschwindigkeiten  $v/c \ll 1$  eine Näherung für die tatsächliche Lagrangefunktion sind und die Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegung näherungsweise beschreiben.

---

<sup>7</sup>Die zweite zeitliche Ableitung des Dipolmoments ist wegen der gleichförmig gradlinigen Bewegung des Schwerpunktes konstant.

# Kapitel 2

## Die Poincaré-Gruppe

### 2.1 Einige Eigenschaften

#### 2.1.1 Gruppentheoretische Eigenschaften

Die Poincarégruppe  $P$  ist eine zehnparametrische Liegruppe bestehend aus der Lorentzgruppe und der Raum-Zeit-Translationsgruppe. Die Translationsgruppe  $T$  ist Normalteiler<sup>1</sup> in  $P$ , was es erlaubt, sie bei den meisten Überlegungen zunächst beiseite zu lassen und nur die Lorentzgruppe zu betrachten. Andere wichtige Untergruppen sind die orthogonale Gruppe  $O(3)$ , die Drehgruppe  $SO(3)$  und die Euklidische Gruppe, bestehend aus Drehgruppe und räumlicher Translationsgruppe. Die Lorentzgruppe und die Poincarégruppe bestehen aus vier Zusammenhangskomponenten, von denen die Zusammenhangskomponente, die das Einselement enthält, ebenfalls eine Untergruppe bildet, die der eigentlichen orthochronen Lorentz- bzw. Poincarétransformationen  $L_+^\uparrow$  bzw.  $P_+^\uparrow$ . Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie weder Zeit- noch Raumspiegelungen enthalten. („+“ steht für die in der Matrixdarstellung positive Determinante und „↑“ für das positive Element  $\Lambda_0^0$ , also die Erhaltung der Zeitrichtung.) Physikalisch ist die Poincarégruppe besonders interessant, weil sie die größte Invarianzgruppe der Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$  bzw. des Linienelementes  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  darstellt [35, S. 216]. Wegen der resultierenden Invarianz der Aufspaltung (1.33) – und des Respektierens der harmoni-

---

<sup>1</sup> Wenn man eine beliebige Poincarétransformation ausführt, dann eine Translation und dann die erste Poincarétransformation wieder rückgängig macht, so ist es, als hätte man nur eine (andere) Translation angewendet. ( $T$  ist abgeschlossen gegenüber inneren Automorphismen von  $P$ .)

schen Eichung bei linearer Wirkung – ist es auch die größte Invarianzgruppe, die wir für Vorhersagen der post-Newtonischen Näherung in harmonischer Eichung erwarten können. Analoges gilt für die post-Coulombsche Näherung.

## 2.1.2 Wirkung der Lorentzgruppe

„Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Liegruppe. Eine (*Links-*)*Wirkung* der Liegruppe  $G$  auf  $M$  ist eine glatte Abbildung  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  mit

- (i)  $\Phi(e, x) = x$  für alle  $x \in M$  und
- (ii)  $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in M$ .“ [36, S.322]

Dabei ist  $e$  das Einselement, und „glatt“ bezieht sich auf die der Liegruppe (als Mannigfaltigkeit) zugrundeliegende differenzierbare Struktur. Die Eigenschaft (i) besagt, dass  $\Phi(e, .)$  des Einselementes die identische Abbildung auf  $M$  ist und (ii) bedeutet die Verträglichkeit der Wirkungsabbildung mit der Gruppenstruktur.

Ist  $M$  ein vollständiger normierter Vektorraum  $V$  und jedes  $\Phi_g := \Phi(g, .) : V \rightarrow V$  eine stetige lineare Abbildung, wird die Wirkung von  $G$  auf  $V$  eine *Darstellung* von  $G$  auf  $V$  genannt. [36, S.322]

Eine aufgrund der physikalischen Relevanz sehr bekannte Darstellung der Lorentzgruppe ist die auf dem  $\mathbb{R}^4$  mit Minkowski-Metrik. Die Abbildungen  $\Phi_g : V \rightarrow V$  sind in einer Basis von  $V$  durch  $4 \times 4$ -Matrizen  $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$  gegeben [37, S. 280]. Tatsächlich ist die Zuordnung  $g \leftrightarrow \Lambda_{\nu}^{\mu'}$  sogar eineindeutig, man sagt, die Darstellung sei treu:

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^{\mu} \quad (2.1)$$

Jede Matrix  $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$  die die Metrik  $\eta_{\mu,\nu}$  invariant lässt, d. h.

$$\eta^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} \eta^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

erfüllt, entspricht dabei genau einem Element der Lorentzgruppe.

Allgemein kann ein Element der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe in Matrixdarstellung als [38, S. 199f],[35, S.117]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_k}{c} \\ -\gamma \frac{v^i}{c} & T_k^i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

mit

$$R_k^i \in SO(3) \quad (2.4)$$

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (2.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.6)$$

$$T_k^i = R_k^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{R_j^i v^j v_k}{c^2} \quad (2.7)$$

geschrieben werden. (Die anderen Zusammenhangskomponenten erreicht man durch Vorschalten einer Raum- oder einer Zeit- oder einer Raum-Zeit-Spiegelung.) Die sechs Parameter sind die drei Komponenten der Geschwindigkeit  $v^i$  und die drei Komponenten des Drehvektors  $\alpha^i$ , von denen die Drehmatrix  $R$  abhängt. In der aktiven Interpretation der Transformation (die in dieser Arbeit durchgängig benutzt werden soll) bedeutet (2.3), dass ein vorher ruhendes Teilchen nach der Transformation die Geschwindigkeit  $-v^i$  hat, die Teilchen also aktiv angeschoben werden (dies entspricht einer Transformation des Koordinatensystems mit  $v^i$ ).<sup>2</sup>

### 2.1.3 Wirkung der Poincarégruppe

Die Poincarégruppe fügt zu den Lorentztransformationen noch Translationen  $a^{\mu'}$  der Raum- Zeitkoordinaten hinzu, d. h.

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\mu'} x^\mu + a^{\mu'} \quad (2.8)$$

Die Darstellung muss stets linear in  $x$  sein, eine Matrixdarstellung benutzt also zumindest den  $\mathbb{R}^5$  und ist nicht besonders elegant. Da wir im Wesentlichen an der Lie-Algebra interessiert sind, wenden wir uns direkt den Erzeugenden zu.

---

<sup>2</sup>Etwas technischer gesprochen, werden auf einem Vektorraum im aktiven Fall die Komponentenfunktionen  $x^\mu$  transformiert, im passiven die Basisvektoren  $e_\mu$ . Weil der Vektor  $x^\mu e_\mu$  (z. B. Teilchenort) im passiven Fall invariant bleibt, werden die Komponentenfunktionen invers transformiert. Auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  entspricht die aktive Transformation einem Diffeomorphismus  $M \rightarrow M$ , die passive einem Kartenwechsel.

## 2.2 Die Lie-Algebra der Poincarégruppe

### 2.2.1 Erzeugende der Poincarégruppe

Die Poincarégruppe besitzt zehn Parameter (in obiger Darstellung  $v^i$ ,  $\alpha^i$  und  $a^\mu$ ). Einer Kurve im Parameterraum  $\beta(t)$ <sup>3</sup> entspricht eine Kurve  $g(\beta(t))$  in der Lie-Gruppe G und damit auch in ihrer Darstellung  $\Phi_{g(\beta(t))}(x)$ . Wir betrachten nun eine Kurve  $\beta(t)$  durch das Einselement  $g(\beta(0)) = e$ . Für infinitesimale Parameter  $\tau$  ist eine Näherung der Kurve gegeben durch:

$$\Phi_{g(\tau)} = \text{id}_V + \tau T \quad (2.9)$$

mit

$$T = \frac{d}{d\tau} \Phi_{g(\beta(\tau))} = \left. \frac{d\beta^m(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \left. \frac{\partial}{\partial \beta^m} \Phi_{g(\beta)} \right|_{\beta(0)}. \quad (2.10)$$

Die Menge der T nennt man die *infinitesimalen Erzeugenden* der Lie-Gruppe (hier der Poincarégruppe). Wie man anhand von (2.10) sieht, bilden sie einen Vektorraum, der von den Erzeugenden

$$T_m = \left. \frac{\partial}{\partial \beta^m} \Phi_{g(\beta)} \right|_{\beta(0)} \quad (2.11)$$

aufgespannt wird. Wie sieht diese Basis der Erzeugenden im Falle der Poincarégruppe in Matrixdarstellung konkret aus? Die Erzeugenden der homogenen Lorentztransformationen erhalten wir aus

$$G_i = \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \Phi_{g(\beta)} \right|_{\beta(0)}, \quad (2.12)$$

also explizit:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

---

<sup>3</sup> $\beta(t)$  hat 10 Komponenten  $\beta^m(t)$ :  $v^i(t)$ ,  $\alpha^i(t)$ ,  $a^\mu(t)$ .

und für die Drehungen analog:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

$v_i G_i$  beschreibt eine infinitesimale aktive Lorentztransformation entlang des Vektors  $v$  mit Geschwindigkeit  $-|v|$ ,  $\phi_i J_i$  eine infinitesimale aktive Drehung um  $\phi$  mit Drehwinkel  $-|\phi|$ .

Nun wurde bereits erwähnt, dass die Matrixdarstellung bei Betrachtung der gesamten Poincarégruppe nicht vorteilhaft ist. Man schreibt (2.15) und (2.16) daher besser als lineare Differentialoperatoren, also in einer Form [37, S. 293], die auch als Darstellung in einem entsprechenden Funktionenraum geeignet ist [35, S. 177]:

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{1}{c}x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{c}x^1 \frac{\partial}{\partial x_a^0}, & G_2 &= -\frac{1}{c}x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{1}{c}x^2 \frac{\partial}{\partial x_a^0}, \\ G_3 &= -\frac{1}{c}x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{c}x^3 \frac{\partial}{\partial x_a^0} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, & J_2 &= x_a^1 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ J_3 &= x_a^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Im Falle der zeitlichen und räumlichen Translation gilt wegen (2.8):

$$H = c \frac{\partial}{\partial x^0} \quad (2.17)$$

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.18)$$

## 2.2.2 Die Poincaré-Algebra

Eine Liealgebra ist ein Vektorraum mit einer bilinearen, schiefsymmetrischen Klammer, die die Jacobi-Identität erfüllt.

In unserer Darstellung ist eine solche Klammer der Kommutator der Erzeugenden der Transformationen. Er macht den Vektorraum der Erzeugenden zu einer Liealgebra. Diese Liealgebra wird *Liealgebra der Liegruppe* genannt und meist –

ebenfalls – mit einem kleinen gotischen  $\mathfrak{g}$  bezeichnet.

Aufgrund der Linearität der Klammer ist es ausreichend, die Klammerrelationen der Basiselemente des Vektorraums der Erzeugenden zu kennen. In der Darstellung (2.15),(2.16),(2.17), (2.18) können wir zur Berechnung den Kommutator der Elemente benutzen. Man erhält damit die Klammerrelationen der Lie-Algebra der Poincarégruppe:

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (2.19)$$

$$[P_i, J_j] = \epsilon_{ijk} P_k \quad (2.20)$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.21)$$

$$[H, P_j] = 0 \quad (2.22)$$

$$[H, J_j] = 0 \quad (2.23)$$

$$[G_i, G_j] = -\frac{1}{c^2} \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.24)$$

$$[G_i, H] = P_i \quad (2.25)$$

$$[J_i, G_j] = \epsilon_{ijk} G_k \quad (2.26)$$

$$[G_i, P_j] = \frac{1}{c^2} \delta_{ij} H \quad (2.27)$$

(Es ist jeweils die Summe über  $k = 1$  bis  $3$  zu nehmen.) Durch die Liealgebra ist die Zusammenhangskomponente der Lie-Gruppe  $G$ , die die Einheit enthält, lokal (um  $e$ ) bereits vollständig bestimmt. Man kann (im Wesentlichen durch Iterieren) aus den infinitesimalen Transformationen endliche Transformationen gewinnen ([38, S.90],[39, S. 261]). Für die gesamte Zusammenhangskomponente gilt dies nur, wenn diese Komponente einfach zusammenhängend ist.  $L_+^\uparrow$  ist nicht einfach zusammenhängend, die Komplikationen stammen dabei aus der ebenfalls nicht einfach zusammenhängenden Drehgruppe [35, S. 168, S. 196].

Die Relationen (2.19)-(2.27) gelten also in jeder treuen Darstellung (für jede treue Wirkung) der Gruppe. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, durch explizites Nachrechnen Erzeugende  $G_i$  zu bestimmen, die zusammen mit den gegebenen Erzeugenden  $H$ ,  $P$  und  $J$  des post-Newtonischen bzw. post-Coulombschen Systems eine approximative Poincaré-Algebra bilden, also bis zur entsprechenden Ordnung Erzeugende der Poincaré-Gruppe sind. Die Oberfläche der Zwangsbedingungen ist aber im Allgemeinen kein Vektorraum mehr, wir haben eine lineare Wirkung  $\Phi(g, (q, \Pi))$  auf  $\Gamma$ .

### 2.2.3 Eine geometrische Sicht der Dinge

$G$  sei eine  $n$ -dimensionale Liegruppe, also eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, die mit der Mannigfaltigkeitsstruktur verträglich ist (die Gruppenverknüpfung  $\circ : G \times G \rightarrow G$  ist eine glatte Abbildung).

Wir sind nun nach Abschnitt 2.2.2 an den infinitesimalen Transformationen, also an den Elementen des Tangentialraumes  $T_e G$  interessiert. In einer Karte sind diese Elemente durch

$$\xi = \xi^m \partial_m, \quad m = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

gegeben.

In diesem Vektorraum wollen wir eine Klammer einführen, die ihn zu einer Lie-Algebra macht.

Zunächst gibt es auf  $G$  – wie bei jeder Mannigfaltigkeit – bereits eine Klammer, die Jacobi-Lie-Klammer oder den Kommutator zweier Vektorfelder  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ , die den Raum der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(G)$  auf  $G$  zu einer Lie-Algebra macht:

$$df \cdot [X, Y] := d(df \cdot Y) \cdot X - d(df \cdot X) \cdot Y \quad \forall f : G \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

In Koordinaten  $y^m$  geschrieben also:

$$[X^k, Y^m] = X^k \frac{\partial Y^m}{\partial y^k} \partial_m - Y^m \frac{\partial X^k}{\partial y^m} \partial_k \quad (2.30)$$

( $k, m = 1, \dots, n$ ). Die zusätzliche Gruppenstruktur von  $G$  wird bei der Definition der Linkstranslation benutzt. Dies ist eine Abbildung, bei der alle Elemente von  $G$  um ein Element der Gruppe  $g$  „verschoben“ werden:

$$L_g : G \rightarrow G \quad (2.31)$$

$$h \rightarrow gh. \quad (2.32)$$

Da  $L_g$  (wegen der oben genannten Verträglichkeit) sogar eine glatte Abbildung ist, kann man das Differential z.B. in  $e$  bilden:  $T_e L_g : T_e G \rightarrow T_g G$ . Offensichtlich ist es damit möglich, jedem  $\xi \in T_e G$  ein Vektorfeld  $X_\xi$  auf ganz  $G$  zuzuordnen:

$$X_\xi := T_e L_g(\xi). \quad (2.33)$$

Insbesondere gilt am Punkt  $e$ :  $X_\xi(e) = \xi$ ,  $X_\xi$  ist also eine Art natürliche Erweite-

rung des Vektors  $\xi$  zu einem Vektorfeld, die es so nur für eine Lie-Gruppe gibt. Mit Hilfe dieser Vektorfelder ist es möglich, auch auf  $T_e G$  eine Klammer einzuführen, die  $T_e G$  zu einer Liealgebra macht. Die Lieklammer  $[ \cdot, \cdot ] : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$  ist definiert als [36, S. 282]

$$[\xi, \chi] := [X_\xi, X_\chi](e). \quad (2.34)$$

In einer Karte um  $e$  geschrieben damit:

$$[\xi, \chi] = \xi^k \frac{\partial X_\chi^m}{\partial y^k}(0) \partial_m - \chi^m \frac{\partial X_\xi^k}{\partial y^m}(0) \partial_k. \quad (2.35)$$

Diese Liealgebra auf  $T_e G$  ist die Liealgebra der Liegruppe.<sup>4</sup>

Eng mit dem Begriff der Wirkung (vgl. Abschnitt 2.1.2). verknüpft ist das Konzept des infinitesimalen Erzeugers. Um zu diesem zu gelangen, benötigen wir noch die sogenannte Exponentialabbildung:

Ist ein Vektorfeld  $X_\xi$  gegeben, existiert eine eindeutige Kurve  $\gamma(t)$ , so dass der Tangentialvektor an  $\gamma$  in jedem Punkt  $g$  gleich  $X_\xi(g)$  ist. Diese Kurve nennt man Integralkurve. Die Exponentialabbildung ist nun dadurch definiert, dass sie jedem Tangentialvektor das Element zuordnet das man durch Entlangfahren der Kurve bei  $t = 1$  erreicht:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (2.36)$$

$$\xi \rightarrow \exp(\xi) = \gamma(1) \quad (2.37)$$

Insbesondere ist damit  $g(t) = \exp(t\xi) = \gamma(t)$  die Integralkurve in  $G$  [36, S. 285]. Wenn  $\xi_1, \dots, \xi_n$  eine Basis des Tangentialraumes von  $e$  ist, lässt sich lokal jedes Element  $g$  der Gruppe durch die Exponentialabbildung  $g = \exp(k^m \xi_m)$  darstellen [17, S. 72]. Die durch die Wirkung aus der Kurve  $g(t) = \exp(t\xi)$  hervorgehende Schar von Abbildungen  $\Phi_{\exp(t\xi)} : M \rightarrow M$  ist ein Fluss<sup>5</sup> auf  $M$  [17, S. 135][36, S. 326]. Zum Fluss gehört ein tangentiales Vektorfeld, das sozusagen die Rich-

---

<sup>4</sup>Bei einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit ist es natürlich auch möglich, die Lie-Klammer sofort über den Ausdruck (2.35) in  $T_e G$  einzuführen.

<sup>5</sup>Also ein einparametrischer Diffeomorphismus für den gilt: Das Hintereinanderausführen zweier Transformationen mit Parameter  $s$  und  $r$  ist gleich dem Ausführen einer Transformation mit Parameter  $s+r$ .

tung der Transformation angibt. Folgerichtig bezeichnet man als infinitesimalen Erzeuger das Tangentialvektorfeld

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(x). \quad (2.38)$$

Dies ist die koordinatenfreie Variante von (2.11) und mit  $\xi_M$  haben wir unsere Erzeuger aus (2.15),(2.16),(2.17),(2.18) wiedergefunden: Das Vektorfeld  $\xi_M$  kann man als eine Richtungsableitung der Funktionen auf  $M$  ansehen, denn in Karten gilt  $df \cdot \xi_M = \xi_M m \frac{\partial f}{\partial x^m}$  für eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Allgemeiner ist die Ableitung eines beliebigen Objektes in Richtung von  $\xi_M$  bekanntlich durch die Lieableitung  $\mathfrak{L}_{\xi_M}$  gegeben, die sich im Falle von skalaren Funktionen  $f$  auf die gewöhnliche Richtungsableitung reduziert.

$\mathfrak{X}(M)$  ist bezüglich des Kommutators wieder eine Lie-Algebra. Wie verhält sich der Kommutator zweier Vektorfelder  $\xi_M, \eta_M$  zur Lie-Klammer auf  $T_e G$ ? Wie wir wissen, ist die Lie-Klammer im Wesentlichen ebenfalls der Kommutator zweier Vektorfelder auf  $G$  und man könnte daher vermuten, dass zumindest ein enger Zusammenhang herrscht. Tatsächlich ist die Abbildung  $\xi \rightarrow \xi_M$  ein Liealgebren-Antihomomorphismus, das heißt, sie ist eine lineare Abbildung zwischen den Algebren  $(g)$  und  $\mathfrak{X}(M)$ , die die Klammerrelationen erhält [36, S. 330]:

$$[\xi_M, \eta_M] = -[\xi, \eta]_M. \quad (2.39)$$

Mit den Kommutatorrelationen (2.19-2.27) der infinitesimalen Erzeugenden ist also auch die Poincaréalgebra gefunden.

# Kapitel 3

## Singuläre Systeme höherer Ordnung

### 3.1 Reguläre Systeme höherer Ordnung

#### 3.1.1 Lagrangeformalismus in höherer Ordnung

Die meisten in der theoretischen Physik vorkommenden Lagrangefunktionen für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden sind von der Form  $L(q, q^{(1)}, t)$ . Schließlich sollte der physikalische Zustand eines Systems allein durch Festlegen der verallgemeinerten Koordinaten und deren ersten Ableitungen bestimmt sein und damit nur auf Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung führen. Bei den Lagrangefunktionen, die die Bewegungsgleichungen der post-Newtonischen- und der post-Coulombschen-Approximation ergeben, treten zusätzlich höhere Ableitungen auf:  $L(q, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, \dots, t)$  (vgl. 1.4.2). Da eine Lagrangefunktion unendlich hoher Ordnung mathematisch ein problematisches Objekt ist (die Existenz der Reihe ist in keiner Weise gesichert), soll im Folgenden stets angenommen werden, dass die vorkommenden Lagrangefunktionen von endlich hoher Ordnung sind, sich also als

$$L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, t) \quad (3.1)$$

schreiben lassen. Eine solche Lagrangefunktionen definiert analog zum gewöhnlichen Fall eine Wirkung  $S$  [40]:

$$S = \int dt L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, t). \quad (3.2)$$

Das Prinzip der stationären Wirkung  $\delta S \stackrel{!}{=} 0$  führt durch Bilden der Funktionalableitung [41, S.42]) (bzw. durch partielle Integration zusammen mit der Forderung, dass die Variationen aller Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  an den Endpunkten verschwinden) auf

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, t)}{\delta q} \delta q \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.3)$$

Das bedeutet, dass die verallgemeinerten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, t)}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(1)}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(2)}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n)}} = 0 \quad (3.4)$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen sind maximal von der Ordnung  $2n$  und die höchsten Ableitungen erscheinen multipliziert mit der Hesse-Matrix

$$H_{lm} = \frac{\partial^2 L}{\partial q_l^{(n)} \partial q_m^{(n)}}, \quad (3.5)$$

wie man an der folgenden Umformung von (3.4) erkennt:

$$\frac{\delta L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, t)}{\delta q} = \sum_{l=1}^f q_l^{(2n)} \frac{\partial^2 L}{\partial q_l^{(n)} \partial q_m^{(n)}} + f_m(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0. \quad (3.6)$$

Der Zustand des Systems wird also im Allgemeinen erst durch Angabe von  $(q, \dots, q^{(2n-1)})$  vollständig bestimmt, der Konfigurationsraum ist somit  $f \cdot (2n)$ -dimensional, wenn  $f$  die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten ist.

### 3.1.2 Hamiltonformalismus in höherer Ordnung

Ein System, das durch einen Lagrange-Formalismus höherer Ordnung beschreibbar ist, erlaubt eine kanonische Formulierung mit einer Hamiltonfunktion höherer Ordnung, die nicht nur von  $q$  und dem kanonisch konjugierten Impuls  $p$  ( $=: \Pi_0$ ) abhängt, sondern auch von den Ableitungen  $q^{(1)}, \dots, q^{(n-1)}$  und den dazu jeweils kanonisch konjugierten Impulsen  $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$ . Der damit gewonnene prolongierte Phasenraum hat natürlich ebenfalls die Dimension  $f \cdot 2n$ . Die Impulse müssen nun so gewählt werden, dass sie ein System von Hamiltonschen Gleichungen er-

füllen. Dies leisten die *Ostrogradski-Impulse*

$$\Pi_{jm} := \sum_{k=0}^{n-j-1} \left( -\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial L}{\partial q_m^{(l+j+1)}}, \quad j = 0, \dots, n-1, m = 1, \dots, f. \quad (3.7)$$

Diese Ausdrücke sind so gewählt, die Impulse wie im gewöhnlichen Fall kovariante Vektorfelder sind [36, S. 191]. In ausgeschriebener Form lautet (3.7)

$$\Pi_{0m} = \frac{\partial L}{\partial q_m^{(1)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(2)}} + \dots + \left( -\frac{d}{dt} \right)^{n-2} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n-1)}} + \left( -\frac{d}{dt} \right)^{n-1} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n)}} \quad (3.8)$$

$$\Pi_{1m} = \frac{\partial L}{\partial q_m^{(2)}} - \dots + \left( -\frac{d}{dt} \right)^{n-3} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n-1)}} + \left( -\frac{d}{dt} \right)^{n-2} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n)}} \quad (3.9)$$

...

...

$$\Pi_{(n-1)m} = \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n)}}. \quad (3.10)$$

Die Gleichung für  $\Pi_{(n-1)}$  wird den Übergang zu einer Hamiltonfunktion erlauben, die von  $q^{(n)}$  nicht abhängt (vgl. 3.2.2), die anderen Gleichungen sichern, dass die Hamiltonfunktion die gewohnten Form annimmt. Man kann aus der expliziten Form direkt ablesen, dass für die einzelnen  $\Pi_{jm}$

$$\Pi_{jm} = \Pi_{jm}(q, \dots, q^{(2n-j-1)}, t), \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

gilt und dass man die Abhängigkeit von der höchsten Ableitung durch die Umformung

$$\Pi_{jm} = q_l^{(2n-j-1)} H_{km} + K_{jm}(q, \dots, q^{(2n-j-2)}, t), \quad j = 0, \dots, n-2 \quad (3.12)$$

isolieren kann, was für  $j = n-1$  nur möglich, wenn  $L$  quadratisch in den  $q_m^{(n)}$  ist<sup>1</sup>. Ist die Hesse-Matrix invertierbar, so kann die Ostrogradski-Transformation durch ein iteratives Verfahren invertiert werden. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann in diesem Fall zumindest im Prinzip (lokal)  $q^{(n)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, t)$  gebildet werden. Durch Invertieren der Hesse-Matrix und Einsetzen der schon

---

<sup>1</sup>Hier liegt eine Unsauberkeit in [3] vor.

erhaltenen Abhängigkeiten erhält man dann aus (3.12) nacheinander  $q^{(n+1)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, \Pi_{n-2}, t)$  bis  $q^{(2n-1)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, \Pi_{n-2}, \dots, \Pi_0, t)$ . Die zeitliche Entwicklung des Systems im Phasenraum wird durch die folgenden Differentialgleichungen bestimmt:

$$\frac{dq_m^{(k)}}{dt} = q_m^{(k+1)}, \quad k = 0, \dots, n-2 \quad (3.13)$$

$$\frac{dq_m^{(n-1)}}{dt} = q_m^{(n)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, t) \quad (3.14)$$

$$\frac{d\Pi_{0m}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_m} \quad (3.15)$$

$$\frac{d\Pi_{jm}}{dt} = -\Pi_{(j-1)m} + \frac{\partial L}{\partial q_m^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (3.16)$$

Die Relationen (3.13) und (3.14) sind offensichtlich, (3.15) erhält man aus der Definition (3.8) von  $\Pi_{0,m}$  zusammen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen (3.4). (3.16) ergibt sich sofort aus der Definition der Ostrogradski-Impulse (3.7) bzw. (3.9),(3.10). Wie man leicht zeigt, nehmen diese Gleichungen mit der Hamiltonfunktion

$$H = -L(q, \dots, q^{(n-1)}, q^{(n)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, t) \\ + \sum_{j=0}^{n-2} \Pi_{jm} q_m^{(j+1)} + \Pi_{(n-1)m} q_m^{(n)}(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, t)) \quad (3.17)$$

(Summenkonvention für  $m$ ) die gewohnte Form

$$\frac{dq_m^{(k)}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_{km}} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\Pi_{km}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m^{(k)}} \quad (3.19)$$

$(k = 0, \dots, n-1, m = 1, \dots, f)$  der Hamiltonschen Gleichungen an. Es ist auch möglich, diese Bewegungsgleichungen direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=0}^{n-1} \Pi_{jm} \frac{d}{dt} q_m^j - H(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.20)$$

abzuleiten.

Man kann nun die *Ostrogradski-Klammer* zweier Phasenraumfunktionen einführen, die nichts anderes ist, als die Poisson-Klammer auf dem prolongierten Phasenraum

$$\{f, g\} := \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=1}^f \frac{\partial f}{\partial q_m^j} \frac{\partial g}{\partial \Pi_{jm}} - \frac{\partial g}{\partial q_m^j} \frac{\partial f}{\partial \Pi_{jm}}. \quad (3.21)$$

Die elementaren Poisson-Klammern sind durch

$$\begin{aligned} \{q_l^{(k)}, \Pi_{jm}\} &= \delta_{lm} \delta_j^k \\ \{q_l^{(k)}, q_m^{(j)}\} &= 0 \\ \{\Pi_{kl}, \Pi_{jm}\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

gegeben und die Zeitentwicklung einer beliebigen Funktion

$f(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}, t)$  auf dem prolongierten Phasenraum wird durch die Gleichung

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.23)$$

beschrieben. Aus der Lagrangefunktion höherer Ordnung kann also ein Hamilton-Formalismus entwickelt werden, der keinerlei Unterschied zum gewöhnlichen Hamilton-Formalismus aufweist [42, S. 265],[43],[3].

## 3.2 Systeme mit Zwangsbedingungen

### 3.2.1 Lagrangeformalismus mit Zwangsbedingungen

In diesem Abschnitt sollen Lagrangefunktionen  $L = L(q, \dots, q^{(n)})$  betrachtet werden, deren Hesse-Matrix  $H_{lm}$  (3.5) nicht invertierbar ist. Die Lehrbuch-Literatur [44, S. 38ff],[45, S.78ff] beschränkt sich auf den Fall, dass die Lagrangefunktion nicht höherer Ordnung ist, es ist aber möglich, diesen intuitiv zu verallgemeinern. Eine strenge geometrische Betrachtung findet sich in [46].

Der Rang der Hesse-Matrix ist nicht vom verwendeten Koordinatensystem abhängig und wird durch Addition einer totalen Zeitableitung zu  $L$  nicht geändert. Man nimmt an, die Hesse-Matrix habe im gesamten Konfigurationsraum den

konstanten Rang  $r < f$ .<sup>2</sup> Dann gibt es  $f - r$  linear unabhängige Nullvektoren mit

$$\sum_{m=1}^f \lambda_m^a(q, \dots, q^{(n)}) H_{lm}(q, \dots, q^{(n)}) = 0, \quad a = 1, \dots, f - r. \quad (3.24)$$

Kontrahiert man die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Form (3.6) mit  $\lambda_l^a$ , so ergibt sich

$$\sum_{m=1}^f \lambda_m^a(q, \dots, q^{(n)}) f_m(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad a = 1, \dots, f - r. \quad (3.25)$$

Dies sind  $f - r$  unabhängige Gleichungen, die im Allgemeinen die unabhängigen Konfigurationsraumvariablen  $q, \dots, q^{(2n-1)}$  verknüpfen, also *Zwangsbedingungen (constraints)* für die Dynamik (und insbesondere für die Anfangsbedingungen) darstellen. Die Gleichungen (3.25) können für unterschiedliche Systeme sehr verschieden aussehen, sie können sogar inkonsistent sein, was äquivalent dazu ist, dass die Wirkung keine stationären Punkte besitzt. Solche Fälle sind physikalisch nicht interessant und sollen hier ausgeschlossen sein. Es gibt dann unter den  $f - r$  Gleichungen von (3.25) zwei qualitativ verschiedene Arten:

- 1) Die Gleichung verschwindet identisch und stellt somit keine Bedingungen an die Variablen des Konfigurationsraumes.
- 2) Die Gleichung verschwindet nicht identisch und ist somit eine echte Einschränkung des Konfigurationsraumes.

Sind alle Gleichungen vom Typ 1), so gibt es keine Zwangsbedingungen und die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich (wegen  $\text{rk } H_{lm} = r$  nach  $r$  Größen  $q_s^{(2n)}, s = 1, \dots, r$  auflösen ( $\text{rk}$  bezeichnet den Rang der Matrix)). Wir erhalten dann Gleichungen der Form

$$q_s^{(2n)} = g_s(q_1, \dots, q_r^{(2n-1)} | q_{r+1}, \dots, q_f^{(2n)}). \quad (3.26)$$

Dabei sind die  $q_{r+1}(t)$  beliebig wählbare Funktionen. Die Größen  $q_s$  werden also nicht allein durch die Anfangswerte, sondern erst durch Festlegung zusätzlicher beliebiger Funktionen der Zeit bestimmt. Das Erscheinen unbestimmter Funktionen der Zeit in der allgemeinen Lösung ist eine typische Eigenschaft von Systemen mit Nebenbedingungen.

---

<sup>2</sup> $H_{lm}$  hängt natürlich nur von den ersten  $f \cdot n$  Variablen des Konfigurationsraumes ab.

Im Allgemeinen werden aber nicht alle Gleichungen identisch verschwinden. Wir nehmen nun an, von den  $f - r$  Gleichungen (3.25) seien  $r_0$  von der Art 1 und diese seien zusätzlich voneinander unabhängig. Des Weiteren gebe es  $r_1$  Gleichungen die von den  $r_0$  vorherigen abhängig sind und schließlich  $r_2$  identisch verschwindende Gleichungen ( $r_0 + r_1 + r_2 = f - r$ ). Die  $r_0$  unabhängigen Gleichungen von der Art 1)

$$C_s(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad s = 1, \dots, r_0 \quad (3.27)$$

heißen dann *primäre* Lagrange-Zwangsbedingungen. Wir wollen zur Vereinfachung zusätzlich annehmen, dass die durch die Gleichungen (3.27) definierte Fläche ( $\tilde{M}$ ) eine  $(2n \cdot f - r_0)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des Konfigurationsraums ist. Oft [45, S. 82] wird auch noch gefordert, dass die Jacobi-Matrix der  $C_s$  den Rang  $r_0$  hat, wenn (3.27) gilt.<sup>3</sup>

Nun wurde der Rang der Hesse-Matrix vorher auf dem gesamten Konfigurationsraum bestimmt. Die Zwangsbedingungen beschränken die Bewegung auf eine Untermannigfaltigkeit mit kleinerer Dimension, der Rang von  $H_{lm}|_{\tilde{M}}$  ist also eventuell kleiner als der von  $H_{lm}$ . In diesem Fall gibt es weitere Nullvektoren, diese müssen wieder in der gleichen Weise untersucht werden, wie die ursprünglichen. Man gelangt dann zu einer Untermannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  von  $\tilde{M}$ , berechnet wieder den Rang von  $H_{lm}|_{\tilde{M}}$  usw. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten damit, dass sich der Rang von  $H$  durch Einschränken auf die neue Untermannigfaltigkeit nicht mehr ändert. Wir haben nun eine Untermannigfaltigkeit  $M'$  der Dimension  $2n \cdot f - r', r' \geq r_0$  gewonnen, die durch  $r'$  Gleichungen

$$C_{s'}(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad s' = 1, \dots, r' \quad (3.28)$$

bestimmt wird. Zur Vereinfachung der folgenden Argumentation teilt man diese in zwei Typen A und B auf:

A Die Zwangsbedingung enthält keine Ableitungen der Ordnung  $2n - 1$ , also

$$A_{s'_a} = C_{s'_a}(q, \dots, q^{(2n-2)}) = 0$$

B Die Zwangsbedingung enthält Ableitungen der Ordnung  $2n - 1$ , also

$$B_{s'_b} = C_{s'_b}(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0.$$

Die bisherigen Zwangsbedingungen wurden lediglich durch algebraische Umfor-

---

<sup>3</sup>Das heißt, die Untermannigfaltigkeit ist eine nach dem Satz vom regulären Wert. Die  $C_s$  bilden zusammen mit einem Koordinatensystem auf  $\tilde{M}$  lokal um  $\tilde{M}_0$  ein Koordinatensystem des Konfigurationsraumes.

mungen der Bewegungsgleichungen gewonnen. Es muss aber zusätzlich die Forderung gestellt werden, dass die Zwangsbedingungen nicht nur für einen bestimmten Zeitpunkt, sondern für alle Zeiten erfüllt sind. Man bildet also zunächst die zeitliche Ableitung einer Zwangsbedingung vom Typ A: Diese ist entweder algebraisch abhängig von den bereits vorhandenen Zwangsbedingungen,

$$\frac{dA_{s'}}{dt} = a_{s'u'}A_{u'} + b_{s'v'}B_{v'}, \quad (3.29)$$

oder liefert neue Zwangsbedingungen des Typs B und (nach algebraischer Umformung mit Hilfe schon bekannter Typ B-Zwangsbedingungen) auch des Typs A. Diese werden in die Menge der Zwangsbedingungen aufgenommen. Nach endlich vielen Wiederholungen liefert das Verfahren keine neuen Zwangsbedingungen mehr und man kann sich den Zwangsbedingungen vom Typ B zuwenden.<sup>4</sup> Durch Ableiten erhält man Gleichungen, die  $q^{(2n)}$  enthalten und (nach Umformung) eventuell weitere neue Nebenbedingungen des Typs B oder A. Nach endlich vielen Wiederholungen ergeben sich keine neuen Nebenbedingungen mehr. Die Gleichungen, die  $q^{(2n)}$  enthalten und nicht reduziert werden können, nimmt man zu den bereits vorhandenen Bewegungsgleichungen hinzu, sofern sie linear unabhängig von ihnen sind.

Durch die zusätzlich erhaltenen Zwangsbedingungen wird die Bewegung aber wieder auf eine Untermannigfaltigkeit von  $M'$  eingeschränkt und der Rang der Hesse-Matrix kann kleiner geworden sein. Dann beginnt das Ganze damit von vorn, dass man die Nullvektoren der eingeschränkten Hesse-Matrix bestimmt. Am Ende dieses Verfahrens findet man folgende Situation vor:

Es gibt Gleichungen,

$$W_{st}(q, \dots, q^{(2n-1)})q_t^{(2n)} = F_s(q, \dots, q^{(2n-1)}), \quad s = 1, \dots, k \quad (3.30)$$

die  $q^{(2n)}$  enthalten, (dabei hat  $W_{st}(q, \dots, q^{(2n-1)})$  vollen Rang), und Zwangsbedingungen

$$A_u(q, \dots, q^{(2n-2)}) = 0, \quad u = 1, \dots, k_A \quad (3.31)$$

$$B_v(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad v = 1, \dots, k_B \quad (3.32)$$

---

<sup>4</sup>Zweite Ableitungen  $\frac{d^2A}{dt^2}$  liefern damit keine Gleichungen mehr, die unabhängig von  $A$ ,  $B$  und  $\frac{dB}{dt}$  wären.

der Typen A und B, die man wieder zu

$$C_w(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad w = 1, \dots, k_A + k_B =: K \quad (3.33)$$

zusammenfassen kann. Sie definieren eine  $(2n \cdot f - K)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  des Konfigurationsraumes, auf dem die Bewegung stattfindet. Die zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingungen  $A_u$  sind nach Konstruktion algebraische Funktionen der Zwangsbedingungen und die zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingungen  $B_v$  lassen sich durch (3.30),(3.31),(3.32) ausdrücken. Das heißt, die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} C_w(q, \dots, q^{(2n-1)}) = 0, \quad w = 1, \dots, K \quad (3.34)$$

sind auf  $M$  algebraisch erfüllt oder anders gesagt, die Zwangsbedingungen sind stabil unter zeitlicher Evolution des Systems. Die Bewegungsgleichungen (3.30) determinieren also die Dynamik des Systems (bis auf eventuell auftretende beliebige Funktionen der Zeit  $q_m(t)$ ), während die Zwangsbedingungen (3.33) die möglichen Anfangswerte einschränken.

### 3.2.2 Hamiltonformalismus mit Zwangsbedingungen

#### Die Bewegungsgleichungen

Auch im Falle des Hamiltonformalismus mit Nebenbedingungen beschränkt sich die Buch-Spezialliteratur auf die Beschreibung von Systemen, die nicht von höherer Ordnung sind [45],[44],[47]. Die Konzepte sind aber übertragbar, da es im Hamiltonschen Formalismus nicht wesentlich ist, wie die Koordinaten und Impulse zustande gekommen sind, solange man in sinnvoller Weise eine symplektische Form (in Koordinaten: Poissonklammer) einführen kann.

Anfangspunkt ist die Definition der Ostrogradski-Impulse (3.7) bzw. (3.8)-(3.10). Ist die Hesse-Matrix nicht invertierbar, so ist auch die Abbildung  $(q, \dots, q^{(2n-1)}) \rightarrow (q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$  nicht invertierbar. Das heißt, die  $(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$  sind als Funktionen der  $(q, \dots, q^{(2n-1)})$  nicht alle unabhängig. Hat  $H$  den Rang  $r$  gibt es  $f - r$  unabhängige Relationen

$$\Phi_i(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}, t), \quad (3.35)$$

die als primäre Zwangsbedingungen bezeichnet werden. Bei Einsetzen von  $\Pi_{jm} = \Pi_{jm}(q, \dots, q^{(2n-j-1)}, t)$  verschwinden sie identisch, auf dem Phasenraum stellen sie aber Zwangsbedingungen an Koordinaten und Impulse. Von diesen Zwangsbedingungen wird wieder verlangt, dass ihre Jacobi-Matrix an den Urbildpunkten von  $\Phi_i = 0$  vollen Rang hat, dass also die durch die Gleichungen definierte Fläche eine Untermannigfaltigkeit ist und die  $\Phi_i$  lokal zusammen mit einer Karte der Untermannigfaltigkeit ein Koordinatensystem des Phasenraumes bilden. Man bezeichnet die Untermannigfaltigkeit als *Zwangsbedingungsfläche (constraint surface)*  $\Gamma$ . Die Zeitentwicklung des Systems wird durch die Ostrogradski-Hamiltonfunktion (3.17) zuzüglich einiger beliebiger Funktionen bestimmt: Sehen wir  $H$  zunächst als Funktion der Variablen des Konfigurationsraumes an:

$$H(q, \dots, q^{(2n-1)}) = -L(q, \dots, q^{(n)}) + \sum_{j=0}^{(n-1)} \Pi_{jm}(q, \dots, q^{(2n-j-1)}) q_m^{j+1}. \quad (3.36)$$

Wir wollen von nun an voraussetzen, dass  $L$  nicht explizit zeitabhängig ist. Außerdem soll über  $l, m = 1, \dots, f$  stets summiert werden.

Das Bemerkenswerte an  $H$  ist, dass die Ableitungen höher als  $q^{(n-1)}$  nur in der Kombination  $\Pi_{jm}(q, \dots, q^{(2n-j-1)}, t)$  in  $H$  eingehen,  $H$  also in Wirklichkeit nur von  $(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$  abhängt. Dies verifiziert man am einfachsten durch Bilden der Variation von  $H$ :

$$\begin{aligned} \delta H &= - \sum_{j=0}^n \frac{\partial L}{\partial q_m^{(j)}} \delta q_m^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2n-j-1} \frac{\partial \Pi_{jm}}{\partial q_l^k} \delta q_l^{(k)} q_m^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \Pi_{jm} \delta q_m^{(j+1)} \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(j)}} \delta q_m^{(j)} - \frac{\partial L}{\partial q_m^{(n)}} \delta q_m^{(n)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-2} (q_m^{(j+1)} \delta \Pi_{jm} + \Pi_{jm} \delta q_m^{(j+1)}) + q_m^{(n)} \delta \Pi_{n-1} + \Pi_{n-1} \delta q_m^{(n)} \\ &= - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial q_m^{(j)}} \delta q_m^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-2} (q_m^{(j+1)} \delta \Pi_{jm} + \Pi_{jm} \delta q_m^{(j+1)}) + q_m^{(n)} \delta \Pi_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die vorkommende Koordinate  $q^{(n)}$  kann zwar nicht durch  $(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1}, t)$  ausgedrückt werden, es ist aber trotzdem möglich, die Hamiltonfunktion  $H(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$  zu bilden, indem man die vorkommenden  $q^{(n)}$  zusammen mit anderen Variablen als  $\Pi_{n-1}$  schreibt. Allerdings ist diese Umformung

nicht eindeutig (sonst wäre  $(q, \dots, q^{(n)}) \rightarrow (q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_{n-1})$  umkehrbar.) Da die Hamiltonfunktion nur auf der Zwangsbedingungsfläche durch (3.17) definiert ist, liegt es nahe anzunehmen, dass der Formalismus (und die am Ende resultierende Dynamik des Systems) sich nicht ändert, wenn  $H$  außerhalb dieser Oberfläche verändert wird:

$$H \longrightarrow H' = H + c^a \Phi_a. \quad (3.38)$$

Dies ist tatsächlich der Fall.<sup>5</sup> Die Beweise [47, S. 11], [45, S. 93], [44, S. 46] für Systeme gewöhnlicher Ordnung können leicht abgewandelt übertragen werden, wenn man die Phasenraumvariablen wie gewöhnliche Koordinaten  $q$  und Impulse  $p$  behandelt. Dies soll für den Beweis in [47] vorgeführt werden.

Dazu benötigen wir den folgenden kleinen Satz [47, S.10]:

„If  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  for arbitrary variations  $\delta q^n, \delta p_n$  tangent to the constraint surface, then

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n} \quad (3.39)$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n} \quad (3.40)$$

for some  $u^m$ . The equalities here are equalities on the surface.“

Dieser Satz ist ein Satz über Mannigfaltigkeiten bzw. Kurven und deren Variationen auf Mannigfaltigkeiten und kann wörtlich auf den Fall des prolongierten Phasenraumes übertragen werden.

Nun schreiben wir Gleichung (3.37) in der Form:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\partial H}{\partial q_m^{(j)}} + \frac{\partial L}{\partial q_m^{(j)}} - \Pi_{(j-1)m} \right) \delta q_m^{(j)} + \left( \frac{\partial H}{\partial \Pi_{jm}} - q_m^{(j)} \right) \delta \Pi_{jm} = 0, \quad (3.41)$$

wobei  $\Pi_{-1m} = 0$  sein soll. Der eben zitierte Satz kann nun dazu benutzt werden, dies als

$$q_m^{(j)} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_{jm}} + u^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \Pi_{jm}} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial L(q, \dots, q^{(n)})}{\partial q_m^{(j)}} - \Pi_{(j-1)m} = -\frac{\partial H(q, \Pi)}{\partial q_m^{(j)}} - u^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_m^{(j)}} \quad (3.43)$$

---

<sup>5</sup>Die Uneindeutigkeit in der Ersetzung von  $q^{(n)}$  beruht auf solchen Veränderungen von  $H$ .

zu formulieren. Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen (3.4), insbesondere (3.15, 3.16) ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen der Dynamik:

$$\frac{dq_m^{(j)}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_{jm}} + u^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \Pi_{jm}} \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Pi_{jm}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m^{(j)}} - u^a \frac{\partial \Phi}{\partial q_m^{(j)}} \quad (3.45)$$

$$\Phi_a(q, \Pi) = 0. \quad (3.46)$$

Mit der Poisson-Klammer auf dem prolongierten Phasenraum kann die Zeitevolution einer beliebigen Phasenraumfunktion damit als

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + u^m \{f, \Phi_m\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.47)$$

geschrieben werden. Die auftretenden  $u^m$  sind Funktionen der Konfigurationsraumvariablen ((3.42) ist wegen der Regularitätsbedingung an  $\Phi_a$  im Prinzip nach  $u^m$  auflösbar). Umgekehrt können sie ausgehend vom Phasenraum als freie Parameter betrachtet werden, die die Abbildung  $(q, \dots, q^{(2n-1)}) \rightarrow (q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}, u^m)$  invertierbar machen, also als Koordinaten des Urbildes eines Punktes  $(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1})$  im Konfigurationsraum.

Die primären Zwangsbedingungen sind im Laufe der Dynamik zunächst nicht von sich aus erhalten. Sie stellen zusätzlich zu den differentiellen Bewegungsgleichungen Bedingungen an die Dynamik des Systems. Man kann aber nun wieder die zeitlichen Ableitungen der Zwangsbedingungen bilden und mit der Forderung  $d/dt(\Phi) = 0$  und mit (3.47) Einschränkungen an die  $u^a$  oder neue, sekundäre Zwangsbedingungen erhalten. Aus diesen wieder tertiale usw. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten damit, dass wir  $K$  Zwangsbedingungen

$$\Phi_k(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.48)$$

erhalten, die wieder den üblichen Regularitätsbedingungen gehorchen sollen, also eine glatte Untermannigfaltigkeit als Zwangsbedingungsfläche  $\Gamma$  definieren.

Wie ist die Beziehung zu den Zwangsbedingungen des Lagrangeformalismus? Man kann zeigen, dass (die Notation deutet es bereits an) Hamiltonsche und Lagrangesche Zwangsbedingungen für singuläre Systeme höherer Ordnung äquivalent

sind [46]. (Insbesondere übernehmen die  $\Phi_a$  die zeitliche Stabilität von den  $C_w$ .) Wenn es also gelingt, die  $K$  Zwangsbedingungen  $C_w = 0$  des Lagrangeformalismus unter Zuhilfenahme der Definitionsgleichungen für die Impulse so umzuformen, dass  $K$  unabhängige Gleichungen  $\Phi_a = 0$  entstehen, die die Phasenraumvariablen verknüpfen und eine Untermannigfaltigkeit definieren, so kann man diese als Zwangsbedingungen des Hamilton-Formalismus ansehen.

### Zwangbedingungen erster und zweiter Klasse

Hat man einen vollständigen Satz von Zwangbedingungen  $\Phi_k$  gefunden, kann man die Einschränkungen an die  $u^a$  mit den primären Zwangbedingungen  $\Phi_a$  gemäß

$$0 \approx \{\Phi_k, H\} + u^a \{\Phi_k, \Phi_a\}, \quad k = 1, \dots, K; \quad a = 1, \dots, r \quad (3.49)$$

formulieren. Um auszudrücken, dass eine Gleichheit nur auf der Zwangbedingungsfläche gilt, wollen wir dabei das Symbol  $\approx$  benutzen.<sup>6</sup> Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist von der Form  $u^a = U^a + V^a$ , mit einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems  $U^a$  und einer allgemeinen Lösung  $V^a$  von

$$V^a \{\Phi_k, \Phi_a\} \approx 0. \quad (3.50)$$

Die allgemeine Lösung  $V^a$  ist dabei eine Linearkombination unabhängiger Lösungen  $V_s^a$  mit  $s = 1, \dots, K - A$ , wobei  $A$  der Rang der Matrix  $\{\Phi_k, \Phi_a\}$  ist. Somit wird die Zeitevolution durch

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + U^a \{f, \Phi_a\} + v^s V_s^a \{f, \Phi_a\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad a = 1, \dots, r; \quad s = 1, \dots, K - A \quad (3.51)$$

mit beliebigen Funktionen  $v^s$  bestimmt. Solche Funktionen treten immer dann auf, wenn bestimmte Zwangbedingungen des Lagrange-Formalismus identisch erfüllt sind, vgl. (3.26) und [44, S. 64].

Von physikalischen Observablen erwarten wir aber, dass ihre Zeitevolution vollständig determiniert ist. Für eine solche Observable dürfen die Funktionen  $v^s$

---

<sup>6</sup>So gilt z.B.  $\Phi_a \approx 0$  oder  $H \approx H'$ .

keine Rolle spielen, das heißt, wir verlangen dass Variationen

$$\delta F = \delta v^s V_s^a \{F, \Phi_a\} \quad (3.52)$$

die physikalische Situation nicht ändern. Es handelt sich hierbei lediglich um Eichtransformationen.

Für die Frage, welche Eichtransformationen auftreten, spielt offensichtlich der Rang der Matrix  $\{\Phi_k, \Phi_a\}$  eine entscheidende Rolle. Dies führt zu einer Einteilung der Zwangsbedingungen in zwei Klassen, die im Gegensatz zur Einteilung der Lagrangeschen Zwangsbedingungen in zwei Typen und der Hamiltonschen in primäre, sekundäre usw. weitreichende Folgen für die Dynamik des Systems hat:

1. Man bezeichnet eine Zwangsbedingung als *erster Klasse*, wenn ihre Poisson-Klammer mit allen anderen Zwangsbedingungen auf  $\Gamma$  verschwindet.
2. Man bezeichnet eine Zwangsbedingung als *zweiter Klasse*, wenn ihre Poisson-Klammer mit einer Zwangsbedingung auf  $\Gamma$  nicht verschwindet.

Hat die Matrix der Poissonklammern

$$C_{kl} = \{\Phi_k, \Phi_l\} \quad (3.53)$$

auf  $\Gamma$  den Rang  $A$ , so kann durch eine Umdefinition der Zwangsbedingungen  $\Phi_j \rightarrow \Phi'_j = A_{kj} \Phi_j$  stets

$$C_{kl} = \{\Phi'_k, \Phi'_l\} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{rs} \end{pmatrix} \quad k, l = 1, \dots, K; s = 1, \dots, A \quad (3.54)$$

erreicht werden. Man kann also annehmen, dass die ersten  $K - A$  Zwangsbedingungen erster Klasse und die letzten  $A$  Zwangsbedingungen zweiter Klasse sind.

### Die Dirac-Klammer

In unseren Systemen werden nur Zwangsbedingungen zweiter Klasse auftreten, insbesondere gibt es keine beliebigen Funktionen der Zeit in der Dynamik. Wir wollen uns daher bei unseren Überlegungen auf diesen Fall beschränken und die Zwangsbedingungen zur besseren Unterscheidung vom allgemeinen Fall mit  $\gamma_k$  bezeichnen. Wir können also annehmen, die Matrix  $C_{kl}$  habe vollen Rang  $K$  auf  $\Gamma$  und sei somit auch auf einer Umgebung von  $\Gamma$  invertierbar.

Daraus folgt insbesondere, dass die Anzahl  $K$  der Zwangsbedingungen gerade ist.<sup>7</sup> Das heißt aber auch, dass die Dimension  $g = 2n \cdot f - K$  von  $\Gamma$  gerade ist. Man kann nun auf  $\Gamma$  und Umgebung lokal bezüglich eines Koordinatensystems die *Dirac-Klammer* einführen:

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \gamma_k\} C_{kl}^{-1} \{\gamma_l, G\}. \quad (3.56)$$

Wie man durch Nachrechnen zeigt, hat sie zunächst die Eigenschaften, die wir von der Poisson-Klammer bereits kennen:

$$\text{Antisymmetrie: } \{F, G\}^* = -\{G, F\}^* \quad (3.57)$$

$$\text{Derivationsregel: } \{F, GR\}^* = \{F, G\}^* R + G \{F, R\}^* \quad (3.58)$$

$$\text{Jacobi-Identität: } \{\{F, G\}^*, R\}^* + \{\{R, F\}^*, G\}^* + \{\{G, R\}^*, F\} = 0. \quad (3.59)$$

Außerdem gibt es noch zwei weitere wichtige Eigenschaften:

Die Dirac-Klammer jeder Funktion  $F$  mit einer der Zwangsbedingungen verschwindet im ganzen Definitionsbereich (also nicht nur auf  $\Gamma$ ) und bei einer Funktion  $G$ , deren Poisson-Klammer mit den Zwangsbedingungen auf  $\Gamma$  verschwindet, ist die Dirac-Klammer auf  $\Gamma$  gleich der Poisson-Klammer.

$$\{\gamma_k, F\}^* = 0 \quad F \text{ beliebig} \quad (3.60)$$

$$\{G, F\}^* \approx \{G, F\} \quad F \text{ beliebig}, \{G, \gamma_k\} \approx 0, \forall \gamma_k \quad (3.61)$$

Aus der ersten Eigenschaft und der Derivationsregel kann man sofort schließen, dass es möglich ist, alle Zwangsbedingungen vor Berechnung der Dirac-Klammer überall gleich null zu setzen. Die zweite führt, wenn man berücksichtigt, dass aufgrund der zeitlichen Stabilität

$$0 \approx \frac{d}{dt} \gamma_k = \{\gamma_k, H\} + u^m \{\gamma_k, \gamma_m\}, \quad m = 1, \dots, r; k = 1, \dots, K \quad (3.62)$$

( $\gamma_m$  primäre Zwangsbedingungen) gilt, direkt auf eine neue Formulierung der

---

<sup>7</sup> $C_{lk}$  ist antisymmetrisch, also

$$\det C = \det C^T = \det (-1C) = (-1)^n \det C. \quad (3.55)$$

Nach Voraussetzung:  $\det C \neq 0$ . Also ist  $n$  gerade.

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F &\stackrel{3.51}{=} \{F, H\} + u^m \{F, \gamma_m\} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&\approx \{F, H + u^m \gamma_m\} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&\stackrel{3.60}{\approx} \{F, H + u^m \gamma_m\}^* + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&\stackrel{3.61}{=} \{F, H\}^* + \frac{\partial F}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Im zweiten Schritt wurde  $\{F, u^m \gamma_m\} \approx u^m \{F, \gamma_m\}$  benutzt.

Nachdem uns die Poisson-Klammer auf dem Phasenraum dazu gedient hat,  $C_{kl}$  zu bestimmen, benötigen wir diese Struktur also nicht mehr und können uns auf die Dirac-Klammer beschränken. Zusätzlich wird die Unterscheidung zwischen primären und sonstigen Nebenbedingungen obsolet. Man kann zeigen [36, S.254], dass die Dirac-Klammer nichts anderes ist als die Einschränkung der Poisson-Klammer auf  $\Gamma$  (oder anders gesagt, der Pullback mit der Inklusionsabbildung), d.h. es gilt für zwei Funktionen  $F$  und  $G$  auf dem Phasenraum und für deren Einschränkung auf  $\Gamma$ :

$$\{F|_\Gamma, G|_\Gamma\}(z) = \{F, G\}^*(z), \quad z \in \Gamma \tag{3.64}$$

## Kanonische Koordinaten

Es ist immer möglich [44, S. 82 ff] auf dem (reduzierten)<sup>8</sup> Phasenraum lokal um einen Punkt  $z$  von  $\Gamma$  ein Koordinatensystem  $(Q, P, \gamma)$  so einzuführen, dass  $Q$  und  $P$  bezüglich der Dirac-Klammer kanonisch konjugiert sind. Dabei sind  $(Q, P)$  Koordinaten des Phasenraumes um  $z$  und  $\gamma$  die Zwangsbedingungen bezüglich  $\Gamma$ .<sup>9</sup>

$$\{P_a, P_b\}^* = 0, \quad a, b = 1, \dots, \frac{g}{2} \tag{3.65}$$

$$\{Q_a, Q_b\}^* = 0 \tag{3.66}$$

$$\{Q_a, P_b\}^* = \delta_{a,b}. \tag{3.67}$$

---

<sup>8</sup>Sind Zwangsbedingungen erster Ordnung vorhanden, muss man den Raum zunächst durch Quotientenbildung bezüglich der Eichorbits reduzieren. [47, S. 54]

<sup>9</sup>Da sich, wie man zeigen kann [47, S.11], alle möglichen Zwangsbedingungen  $\gamma'$  für  $\Gamma$  durch Kombinationen der ursprünglichen  $\gamma$  darstellen lassen, können wir letztere auch beibehalten.

(Nach (3.55) ist  $g/2$  eine ganze Zahl.) In diesen Koordinaten verhalten sich Funktionen auf  $\Gamma$  also genau wie Funktionen in einem regulären System mit  $g$  Freiheitsgraden. Die Zeitentwicklung wird durch die Hamiltonfunktion  $\tilde{H} = H(q(Q, P), \dots, \Pi_{n-1}(Q, P))$  bestimmt, die Zwangsbedingungen sind automatisch erfüllt und müssen nicht mehr berücksichtigt werden.

Diese Transformation ist in den von uns betrachteten Systemen sogar global möglich, was die vorkommenden Rechnungen stark vereinfacht.

### 3.3 Verallgemeinerte kanonische Transformationen

#### 3.3.1 Kanonische Transformationen im Fall höherer Ordnung

Die Erkenntnisse über kanonische Transformationen von Systemen gewöhnlicher Ordnung können wieder direkt auf Systeme höherer Ordnung übertragen werden. Es ist ja auch hier nur wichtig, dass wir einen Satz kanonisch konjugierter Variablen und eine symplektische Struktur (Poissonklammer) auf dem Phasenraum gegeben haben, sowie eine Hamiltonfunktion, die die Zeitentwicklung bestimmt. Eine Transformation  $(q, \Pi) \rightarrow (\bar{q}, \bar{\Pi})$  wird also als kanonisch bezeichnet, wenn es im neuen Koordinatensystem eine Funktion  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{\Pi})$  gibt, so dass aus

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=0}^{n-1} \Pi_{jm} \frac{d}{dt} q_m^{(j)} - H(q, \dots, q^{(n-1)}, \Pi_0, \dots, \Pi_{n-1}) = 0 \quad [3.20]$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\Pi}_{jm} \frac{d}{dt} \bar{q}_m^{(j)} - \bar{H}(\bar{q}, \dots, \bar{q}^{(n-1)}, \bar{\Pi}_0, \dots, \bar{\Pi}_{n-1}) = 0 \quad (3.68)$$

folgt. Dies ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d}{dt} q_m^{(j)} \Pi_{jm} - H \right] - \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d}{dt} \bar{q}_m^{(j+1)} \bar{\Pi}_{jm} - \bar{H} \right] = \frac{d}{dt} F(q, \Pi, \bar{q}, \bar{\Pi}, t) \quad (3.69)$$

und zu der Aussage, dass die Bewegungsgleichungen, die eine direkte Folge des Hamiltonschen Prinzips (3.20) sind, auch mit  $\bar{H}$  die gewohnte Form annehmen. Man kann außerdem zeigen, dass Transformationen genau dann kanonisch sind, wenn sie die Poissonklammern invariant lassen [38, S. 109].

Da die alten und neuen Koordinaten über einen Diffeomorphismus zusammenhängen, hängt  $F$  nur von  $2nf$  unabhängigen Variablen ab. Durch Angabe von  $F$  ist die Transformation und die neue Hamiltonfunktion  $\bar{H}$  weitgehend bestimmt und man kann von den verschiedenen  $F$  auf sogenannte Erzeugende  $F_1$  bis  $F_4$  schließen, die jeweils von verschiedenen Koordinaten abhängen und auf jeweils genau eine kanonische Transformation führen:

$$F_1 = F_1(q, \bar{q}, t) \quad (3.70)$$

$$F_2 = F_2(q, \bar{\Pi}, t) \quad (3.71)$$

$$F_3 = F_3(\Pi, \bar{q}, t) \quad (3.72)$$

$$F_4 = F_4(\Pi, \bar{\Pi}, t). \quad (3.73)$$

Die kanonischen Transformationen bilden eine  $2n \cdot f$ -dimensionale Lie-Gruppe, die symplektische Gruppe (vgl. z. B. [39, S. 259ff]). Um die zugehörige Lie-Algebra zu finden, müssen wir uns mit infinitesimalen Transformationen beschäftigen. Also sind für uns nur die Erzeugenden interessant, die auch die identische Abbildung generieren. Das sind  $F_2$  und  $F_3$ . Wir wählen  $F_2$  aus. Die von  $F_2$  erzeugte kanonische Transformation lautet

$$\Pi_{jm} = \frac{\partial F_2}{\partial q_m^{(j)}} \quad (3.74)$$

$$\bar{q}_m^{(j)} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\Pi}_{jm}} \quad (3.75)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (3.76)$$

was man genauso herleitet wie im gewöhnlichen Fall (für diesen siehe z.B. [48, S. 329]). Die identische Abbildung wird offensichtlich von

$$F_2 = \sum_{j=0}^{n-1} q_m^{(j)} \bar{\Pi}_{jm} \quad (3.77)$$

erzeugt. Bei einer Transformation mit infinitesimalem Parameter  $\tau$  erhalten wir:

$$F_2(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} q_m^{(j)} \bar{\Pi}_{jm} + \tau \sigma(q, \bar{\Pi}) + O(\tau^2). \quad (3.78)$$

Analog zu (2.10) wird dann

$$\sigma(q, \bar{\Pi}) = \frac{d}{d\tau} F_2(\tau) \quad (3.79)$$

als *Erzeugende der infinitesimalen kanonischen Transformation* bezeichnet. Aus (3.74), (3.75) folgt für die infinitesimale Transformation der Koordinaten:

$$\bar{q}_m^{(j)} = q_m^{(j)} + \tau \frac{\partial \sigma(q, \bar{\Pi})}{\partial \bar{\Pi}_{jm}} + O(\tau^2) \quad (3.80)$$

$$\Pi_{jm} = \bar{\Pi}_{jm} + \tau \frac{\partial \sigma(q, \bar{\Pi})}{\partial q_m^{(j)}} + O(\tau^2). \quad (3.81)$$

Da wir nur Terme bis zur ersten Ordnung in  $\tau$  betrachten, kann man in  $\sigma$  alle  $\bar{\Pi}$  durch  $\Pi$  ersetzen. Die infinitesimalen Veränderungen der Koordinaten lauten dann

$$\delta q_m^{(j)} = \bar{q}_m^{(j)} - q_m^{(j)} = \tau \frac{\partial \sigma(q, \Pi)}{\partial \Pi_{jm}} = \tau \{q_m^{(j)}, \sigma(q, \Pi)\} \quad (3.82)$$

$$\delta \Pi_{jm} = \bar{\Pi}_{jm} - \Pi_{jm} = -\tau \frac{\partial \sigma(q, \Pi)}{\partial q_m^{(j)}} = \tau \{\Pi_{jm}, \sigma(q, \Pi)\}. \quad (3.83)$$

Der infinitesimalen Erzeugenden  $T$  von Abschnitt 2.2.1 in differentieller Darstellung entspricht also hier der Differentialoperator

$$T = \{., \sigma\} \quad (3.84)$$

mit der Erzeugenden der infinitesimalen Transformation  $\sigma$ . Für eine Phasenraumfunktion  $G$  bedeutet das

$$\delta_\tau G = \tau \{G, \sigma\}. \quad (3.85)$$

Tatsächlich lässt sich jede infinitesimale Erzeugende lokal bezüglich bestimmter Koordinaten so schreiben (Rektifizierungssatz, [36, S. 165]). Für Erzeugende kanonischer Transformationen gilt das sogar global.

Kommen wir nun zur Lie-Algebra: Die Lie-Algebra der infinitesimalen Erzeugenden hatte als Lie-Klammer den Kommutator. Sind  $T$  und  $R$  zwei infinitesimale Erzeugende, kann man den Kommutator mit (3.84) als

$$[T, R] = [\{., \sigma\}, \{., \rho\}] \quad (3.86)$$

$$= \{., \{\sigma, \rho\}\} \quad (3.87)$$

schreiben. Es ist klar, dass  $\{.,.\}$  den Vektorraum der Erzeugenden kanonischer Transformationen zu einer Lie-Algebra macht. Die Poisson-Klammer-Relationen der Erzeugenden infinitesimaler Transformationen sind dabei mit den Klammerrelationen der Lie-Algebra der entsprechenden Transformationsgruppe identisch. Für die Poincaré-Gruppe heißt das: Es gibt (zumindest lokal um  $e$ ) eine Darstellung als kanonische Transformationen auf dem Phasenraum, wenn es Erzeugende der infinitesimalen Transformation  $P_i(q, \Pi), J_i(q, \Pi), H(q, \Pi), G_i(q, \Pi)$  gibt, die bezüglich der Poisson-Klammern  $\{.,.\}$  die Relationen (2.19-2.27) erfüllen. Haben wir eine physikalische Interpretation der Phasenraumvariablen, z.B. als kartesische Ortskoordinaten von Teilchen, so ist es sinnvoll zusätzlich zu fordern, dass die Variablen  $(q)$  gemäß (2.15, 2.16, 2.17, 2.18) transformiert werden, dass also  $P_i(q, \Pi), J_i(q, \Pi), H(q, \Pi), G_i(q, \Pi)$  die Erzeugenden von räumlicher Translation, räumlicher Drehung, Zeittranslation und spezieller Lorentztransformation sind (auf die Transformationseigenschaften der Impulse kann man dann, wenn nötig, aus (3.7) schließen). Man sagt in diesem Fall, die Theorie sei Poincaré-invariant.

### 3.3.2 Verallgemeinerte kanonische Transformationen

Transformationen, die die Dirac-Klammer invariant lassen, werden verallgemeinerte kanonische Transformationen genannt. Auch sie lassen sich stets aus Erzeugenden infinitesimaler verallgemeinerter kanonischer Transformation  $\sigma$  gewinnen:

$$\delta_\tau G = \tau\{G, \sigma\}^*. \quad (3.88)$$

Solche Transformationen ändern die Zwangsbedingungen wegen (3.60) nicht, insbesondere lassen sie die Zwangsbedingungsfläche invariant:

$$\delta_\tau \gamma_k = \tau\{\gamma_k, \sigma\}^* \stackrel{(3.60)}{=} 0. \quad (3.89)$$

Aus (3.61) lesen wir eine weitere Eigenschaft ab: Offensichtlich ist eine Erzeugende bezüglich der Poisson-Klammer, die die Zwangsbedingungen invariant lässt (also  $\{\sigma, \gamma\} = 0$ ), auch eine Erzeugende einer verallgemeinerten kanonischen Transformation bezüglich der Dirac-Klammer. In diesem Fall gilt ja  $\{\sigma, .\} = \{\sigma, .\}^*$ . Dies ist tatsächlich ganz allgemein gültig: Kennen wir eine Erzeugende auf dem

gesamten Phasenraum (das ist z. B. für  $P_i$  und  $J_i$  der Fall), so kann die Erzeugende auf  $\Gamma$  gemäß (3.64) durch simples Einschränken oder Benutzen der Dirac-Klammer gewonnen werden. Umgekehrt ist es stets möglich (wenn auch nicht immer sinnvoll), eine verallgemeinerte kanonische Transformation auf  $\Gamma$  zu einer kanonischen Transformation des Phasenraumes zu erweitern [45, S. 124], die so konstruiert wird, dass ihre Poissonklammern mit den Zwangsbedingungen auf  $\Gamma$  verschwindet,  $\Gamma$  also invariant bleibt.<sup>10</sup> Es ist aber zu beachten, dass trotz dieser Zusammenhänge die verallgemeinerten kanonischen Transformationen normalerweise keine Untergruppe der kanonischen Transformationen auf dem gesamten Phasenraum bilden, sondern eine eigene Struktur haben, weil die Variablen  $(q, \Pi)$  im Allgemeinen nicht kanonisch sind. Wegen 3.2.2 gilt aber, dass man lokal stets solche kanonische Koordinaten findet. Für Transformationen nahe der Identität, ist die Struktur also gleich, so dass eine Untergruppe vorliegt [45, S. 131]. Im Fall der von uns betrachteten Systeme gelingt es sogar, global zu kanonisch konjugierten Koordinaten überzugehen, dass heißt, die verallgemeinerten kanonischen Transformationen sind eine  $g$ -dimensionale Untergruppe der  $2n \cdot f$ -dimensionalen Gruppe der kanonischen Transformationen des gesamten Phasenraumes.

Wie ist die Beziehung der Lie-Algebra einer Gruppe von kanonischen Transformationen zur Dirac-Klammer? Zunächst ist klar, dass die Dirac-Klammer die Funktionen auf  $\Gamma$  zu einer Lie-Algebra macht. Da die infinitesimalen Transformationen nahe der Identität liegen, können wir zu kanonisch konjugierten Variablen übergehen und dort genauso argumentieren, wie im vorherigen Abschnitt 3.3.1, um danach wieder zu den üblichen Variablen zurückzukehren: Die Dirac-Klammer-Relationen (der Lie-Algebra) der Erzeugenden verallgemeinerter kanonischer Transformationen entsprechen genau den Klammerrelationen der Lie-Algebra der Gruppe.

### 3.3.3 Eine geometrische Sicht der Dinge

In diesem Abschnitt können wir dank der allgemeineren geometrischen Sprechweise den singulären und nichtsingulären Fall gemeinsam behandeln. Es soll angenommen werden, dass wir eine  $g$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$ , mit  $g$  gerade (also z. B. den  $2n \cdot f$ -dimensionalen Phasenraum oder  $\Gamma$ ) gegeben haben. Dar-

---

<sup>10</sup>Im Gegensatz zur Erzeugenden bezüglich der Dirac-Klammer wird aber nicht mehr jede Fläche mit konstantem  $\gamma_k$  invariant gelassen.

auf möge eine symplektische Form gegeben sein (in Koordinaten: Poisson- oder Dirac-Klammer), also eine schiefsymmetrische, geschlossene und nichtausgeartete Zweiform  $\omega$ .<sup>11</sup> (Dies ist im singulären Fall dann möglich, wenn man die Eichorbits herausgeteilt hat oder keine Zwangsbedingungen erster Klasse vorkommen.) In lokalen Koordinaten ist  $\omega$  nach dem Satz von Darboux stets als

$$\omega = \sum_{k=0}^{g/2} dx^k \wedge dx^{g/2+k} \quad (3.90)$$

schreibbar. Diese Koordinaten bezeichnet man dann als kanonisch (vgl. 3.2.2). Nun benötigen wir den Begriff des *Hamiltonschen Vektorfeldes*: Ein Vektorfeld wird Hamiltonsch<sup>12</sup> genannt und mit  $X_F$  bezeichnet, wenn es eine Funktion  $F$  auf dem Phasenraum gibt, so dass

$$\omega_z(X_F(z), v) = dF(z) \cdot v \quad (3.91)$$

für alle  $v \in T_z M$  gilt also lokal in kanonischen Koordinaten

$$X_F(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial F}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (3.92)$$

oder

$$(dG \cdot X_F)(q, p) = \{G, F\}(q, p). \quad (3.93)$$

Die Poisson-Klammer zweier Funktionen ist in koordinatenfreier Schreibweise also als

$$\{F, G\}(z) = \omega(X_F, X_G)(z) \quad (3.94)$$

gegeben. Sie macht den Raum der Funktionen auf  $M, \mathcal{F}(M)$ , zu einer Lie-Algebra. Man kann zeigen, dass der Fluss eines Hamiltonschen Vektorfeldes stets symplektisch/kanonisch ist, also die Transformation die symplektische Struktur bzw. die Poisson- oder Dirac-Klammer erhält [36, S. 167].

Wie wir gesehen hatten (2.2.3, (2.38)), waren die infinitesimalen Erzeugenden geometrisch Vektorfelder  $\xi_M$  auf  $M$ . Die durch sie erzeugten infinitesimalen Ver-

<sup>11</sup>Für eine geometrische Betrachtung des Übergangs vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus im singulären Fall höherer Ordnung siehe [46].

<sup>12</sup>Der Name resultiert wohl aus der möglichen Darstellung der Hamiltonschen Gleichungen als  $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = X_H$

änderungen von Objekten waren durch die Lieableitung entlang des Vektorfeldes gegeben.

Nehmen wir nun an, dass die infinitesimalen Erzeugenden  $\xi_M, \theta_M, \zeta_M$  Hamiltonsche Vektorfelder zu Funktionen  $\Xi, \Theta$  bzw.  $Z$  sind. Für den Kommutator  $[\xi_M, \theta_M] = \zeta_M$  gilt, wie man in lokalen Koordinaten leicht nachrechnet.<sup>13</sup>:

$$X_Z = \zeta_M = [\xi_M, \theta_M] = [X_\Xi, X_\Theta] = X_{-\{\Xi, \Theta\}} \quad (3.95)$$

Und wegen der Eindeutigkeit von  $F$ :

$$Z = -\{\Xi, \Theta\}. \quad (3.96)$$

Mit (3.95) und (3.96) können wir daher folgern:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ F &\rightarrow X_F \end{aligned} \quad (3.97)$$

ist ein Liealgebren-Antihomomorphismus. Aus einer Lie-Klammerrelation der Lie-Algebra einer Liegruppe  $[\xi, \theta] = \zeta$  (vgl.(2.34)) folgt mit (2.39) und (3.97) also eine Poisson-(Dirac-)Klammerrelation der Erzeugenden der entsprechenden Transformation  $\{\Xi, \Theta\} = Z$ .

## 3.4 Erzeugende auf Systemen von Teilchen

### 3.4.1 Die Erzeugende $H$

Wir betrachten hier ein System von  $N$  Punktteilchen, deren Trajektorien  $x_{ai}(t)$  im Phasenraum gegeben sind. Dabei sind  $x_{ai}$  physikalisch die Ortskoordinaten des  $a$ -ten Teilchens in einem kartesischen Koordinatensystem.

$H$  ist die Erzeugende der infinitesimalen Zeittranslation. Im Phasenraum entspricht dies (in unserer aktiven Interpretation) einer infinitesimalen Translation jedes Teilchens entlang seiner Trajektorie. Die Erzeugende der (verallgemeiner-

---

<sup>13</sup>Eleganter und auch für unendliche Dimensionen geeignet, ist die Benutzung der Jacobi-Identität [36, S. 347]

ten) kanonischen Transformation  $H$  ist damit durch

$$\delta_\tau x_{ai}^{(k)} = \tau \frac{d}{dt} x_{ai}^{(k)} = \tau \{x_{ai}^{(k)}, H\}^{(*)} \quad (3.98)$$

$$\delta_\tau \Pi_{k ai} = \tau \frac{d}{dt} \Pi_{k ai} = \tau \{\Pi_{k ai}, H\}^{(*)} \quad (3.99)$$

gegeben. Nach den Bewegungsgleichungen (3.23) bzw. (3.63) ist  $H$  (wie von der Notation schon vorweggenommen) die Hamiltonfunktion des Systems. Da die Hamiltonfunktion numerisch gleich der Gesamtenergie des Systems ist, bedeutet der verschwindende Kommutator  $\{H, H\} = 0$  gemäß

$$\delta_\tau H = \tau \frac{d}{dt} H = \tau \{H, H\} + \tau \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.100)$$

bei nicht explizit zeitabhängiger Funktion  $H$ , dass die Gesamtenergie des Systems erhalten ist.

### 3.4.2 Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$

$P_i$  und  $J_i$  sind physikalisch die Erzeugenden der räumlichen Translation in Richtung der  $i$ -ten Koordinatenachse bzw. der entsprechenden räumlichen Drehung. Die (skalaren) Koordinaten  $x^\mu$  und die kontravarianten verallgemeinerten Geschwindigkeitsvektoren transformieren sich unter einem Diffeomorphismus lokal wie  $x^{\mu'}(x^\mu)$  bzw.  $x^{(l)\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} x^{(l)\mu}$ , ( $l > 0$ ). Für ein Teilchen  $a$  mit Ortsvektor  $x_a$  und Geschwindigkeiten  $x_a^{(n)}$  folgt damit im Fall der infinitesimalen Translation um  $\epsilon$  (Translationsvektor) bzw. der infinitesimalen Drehung um  $\varphi$  (Drehachse und Drehwinkel):

$$\epsilon_i = \delta_\epsilon x_{ai} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_k \{x_{ai}, P_k\} \quad (3.101)$$

$$0 = \delta_\epsilon x_{ai}^{(l)} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_k \{x_{ai}^{(l)}, P_k\}, \quad l > 0 \quad (3.102)$$

$$\sum_{j,k=1}^3 \varphi_k J_{k ij} x_{aj}^{(m)} = \delta_\varphi x_{ai}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \varphi_k \{x_{ai}^{(m)}, J_k\}, \quad m \geq 0. \quad (3.103)$$

Dabei bezeichne  $J_{k\ ij}$  die  $3 \times 3$ -Matrixdarstellungen der infinitesimalen Erzeugenden  $J_k$ , (vgl.(2.14)). Die Impulse sind kovariante Vektorfelder<sup>14</sup>, transformieren sich also wie  $\Pi_{m\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \Pi_{m\mu'}$ , insbesondere skalar unter räumlicher Translation der Koordinaten. Im Fall der Drehung R der Teilchenpositionen (aktive Interpretation) lautet die Transformation:

$$\Pi'_{mai} = \Pi_{maj} R_{ji}^{-1} \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (3.104)$$

Betrachten wir die Komponenten  $\Pi_{mai}$  lediglich als skalare Funktionen auf dem Phasenraum, so kann obige Gleichung wegen der Orthogonalität der Drehmatrix als

$$\Pi'_{mai} = R_{ij} \Pi_{maj} \quad m = 0, \dots, n-1 \quad (3.105)$$

geschrieben werden.<sup>15</sup> Es gilt dann

$$\sum_{j,k=1}^3 \varphi_k J_{k\ ij} \Pi_{maj} = \delta_\varphi \Pi_{mai} = \sum_{k=1}^3 \varphi_k \{ \Pi_{mai}, J_k \}. \quad (3.106)$$

Benutzt man die Antisymmetrie von  $J_{k\ ij}$ , ergibt sich

$$\sum_{i=1}^3 \Pi_{mai} J_{k\ ij} = \frac{\partial J_k}{\partial x_{aj}^{(m)}}. \quad (3.107)$$

Die Erzeugenden der kanonischen Transformation P und J sind damit durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial P_k}{\partial \Pi_{mai}} = \delta_{ik} \delta_{0m}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial x_{aj}^{(n)}} = 0 \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial J_k}{\partial \Pi_{mai}} = J_{k\ ij} x_{aj}^{(m)}, \quad \frac{\partial J_k}{\partial x_{aj}^{(m)}} = \Pi_{mai} J_{k\ ij} \quad (3.109)$$

auf dem Phasenraum gegeben. Auf einem zusammenhängenden Phasenraum (wie er bei unseren Systemen vorliegt<sup>16</sup>), sind  $P_i$  und  $J_i$  damit bis auf eine Konstan-

<sup>14</sup>Dies gilt offensichtlich wegen (3.7) auch für die  $\Pi_m$  (vgl. den Begriff der Faserableitung, [38, S. 257], [36, S. 191])

<sup>15</sup>Das entspricht der Transposition der Gleichung (die Metrik ist flach).

<sup>16</sup>Der Phasenraum ist bei uns eigentlich nur eine Mannigfaltigkeit, da  $r_{12} = 0$  wegen des dort singulären L bzw. H ausgeschlossen werden muss. Wir haben es also mit  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{12n-3}$  zu tun (wie man durch Übergang zu den Koordinaten  $\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2$  sofort sieht). Ist dort ein Weg gegeben,

te eindeutig. Sie können durch direkte Integration von (3.108, 3.109) ermittelt werden. Die Konstante kann mit Hilfe der Poincaré-Algebra (2.20, 2.21) fixiert werden. Wir erhalten dann als eindeutige Lösung

$$P_i = \sum_{a=1}^N \Pi_{0\,ai} \quad (3.110)$$

$$J_i = \sum_{a=1}^N \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j,k=1}^3 \Pi_{m\,ak} J_{ijk} x_{aj}^{(m)} = \sum_{a=1}^N \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_{aj}^{(m)} \Pi_{m\,ak}. \quad (3.111)$$

Die Größen  $P$  und  $J$  sind also der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls bzw. deren Verallgemeinerungen. In einem Poincaré-invarianten System sind diese nach (2.22) und (2.23) erhalten.

Man kann  $P$  und  $J$  im gewöhnlichen Fall mit Variablen ( $x_{ai}, p_{ai} = \Pi_{0\,ai}$ ) auch ohne Annahmen über die Transformation der Impulse weitgehend festlegen:

Aus (3.101, 3.103) folgt, dass  $P_i$  und  $J_i$  höchstens um eine Funktion von  $x_{ai}$  von der Standardform (3.110, 3.111) abweichen. Diese Funktion kann durch eine kanonische Transformation, die lediglich die Impulse  $p$ , nicht aber die (physikalisch als Ortskoordinaten interpretierten)  $x$  verändert, entfernt werden [50], [7].

Bei den von uns in Teil II betrachteten Systemen ist es nicht schwer zu sehen, dass (3.101)–(3.103) sowie (2.22), (2.23) zusammen mit der entsprechenden Hamiltonfunktion die Größen  $P$  und  $J$  bis auf eine Konstante bestimmen, die dann durch (2.20) bzw. (2.21) fixiert wird (vgl. Abschnitt 5.3).

### 3.4.3 Die Erzeugende $G_i$

Die physikalische Interpretation der  $G_i$  als Erzeugende der infinitesimalen Lorentztransformation erlaubt es uns, die Wirkung auf die Teilchenkoordinaten  $x_{ai}$  zu ermitteln [1]. Aus der Differentialoperator-Darstellung (2.15) erhält man mit dem dreikomponentigen Parameter  $v$  (Geschwindigkeitsvektor) für die Koordina-

---

kann er senkrecht in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  projiziert werden (die Projektion ist stetig) und dort wegen des einfachen Zusammenhangs von  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  zusammengezogen werden. Der Phasenraum ist damit sogar einfach zusammenhängend und wir haben nach [49, S. 45] Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen bis auf eine Konstante.

ten:

$$\delta x^0 = -\frac{1}{c} \sum_{j=1}^3 v_j x_j \Leftrightarrow \delta t = -\frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 v_j x_j \quad (3.112)$$

$$\delta x_i = -\frac{1}{c} v_i x^0 \Leftrightarrow \delta x_i = -v_i t. \quad (3.113)$$

(Wir werden die räumlichen Indizes ab jetzt stets als untere Indizes schreiben.) Ein Teilchen  $a$ , das sich vor der Transformation zur Zeit  $t$  am Ort  $x_{ai}$  befand, ist in unserer aktiven Interpretation nach der Transformation zur Zeit  $t'_a = t + \delta t_a$  am Ort  $x'_{ai} = x_{ai} + \delta x_{ai}$ . Es gilt also für die Trajektorien:

$$x'_{ai}(t'_a) = x_{ai}(t) + \delta x_{ai} = x_{ai}(t) - v_i t. \quad (3.114)$$

Da wir die Lorentztransformation aktiv betrachten, haben wir das ursprüngliche Inertialsystem aber gar nicht verlassen (sondern nur die Teilchen angeschoben) und daher muss die Zeitkoordinate  $t'_a$  die Zeitkoordinate des ursprünglichen Inertialsystems sein. Insbesondere ist der korrekte Zeitparameter der Trajektorie  $t'_a$  und wir müssen in (3.114)  $t$  zugunsten von  $t'_a$  eliminieren:

$$x'_{ai}(t'_a) = x_{ai} \left( t'_a + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 v_j x_{aj}(t) \right) - \left( t'_a + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 v_j x_{aj}(t) \right) v_i \quad (3.115)$$

$$= \frac{1}{c^2} x_{ai}(t'_a) + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 v_j x_{aj}(t'_a) \dot{x}_{ai}(t'_a) - v_i t'_a + O(v^2). \quad (3.116)$$

Da wir nun alles durch die Zeit im ursprünglichen Inertialsystem ausgedrückt haben, können wir für diese auch wieder das übliche  $t$  schreiben bzw. als Argument von  $x_{ai}$  weglassen.

Für  $\delta x$  und die Erzeugende der (verallgemeinerten) infinitesimalen kanonischen Transformation  $G_i$ , ergibt sich also

$$\delta_v x_{ai} = \sum_{j=1}^3 v_j \{x_{ai}, G_j\}^{(*)} \quad (3.117)$$

$$= \sum_{j=1}^3 v_j \left( \frac{1}{c^2} x_{aj} \dot{x}_{ai} - \delta_{ij} t \right). \quad (3.118)$$

Mit der Bewegungsgleichung  $\dot{x}_{ai} = \{x_{ai}, H\}^{(*)}$  erhalten wir den als *Weltlinienbedingung* bezeichneten Ausdruck<sup>17</sup>

$$\{x_{ai}, G_j\}^{(*)} = \frac{1}{c^2} x_{aj} \{x_{ai}, H\}^{(*)} - \delta_{ij} t. \quad (3.119)$$

Die Weltlinienbedingung wird zusammen mit der Poincaré-Algebra genügen, um  $G_i$  für die von uns betrachteten Systeme eindeutig zu bestimmen (wenn wir fordern, dass  $P_i$  und  $J_i$  die Erzeugenden der räumlichen Translation und der räumlichen Drehung sind).

Es erweist sich häufig als zweckmäßig, mit  $K_i = G_i + P_i t$  statt mit  $G_i$  zu rechnen. Aufgrund von (2.19, 2.20, 2.21, 2.27) erfüllt  $K_i$  dieselben Klammerrelationen wie  $G_i$ , ist aber nicht mehr explizit zeitabhängig (und keine Erhaltungsgröße), wenn  $G_i$  Erhaltungsgröße ist: In diesem Fall muss wegen (2.25)  $\frac{\partial G_i}{\partial t} = -P_i$  sein und aus der Definition von  $K_i$  folgt  $\frac{\partial K_i}{\partial t} = 0$ .

Die Weltlinienbedingung lautet mit der ersten Hälfte von (3.108) für  $K_j$

$$\{x_{ai}, K_j\}^{(*)} = \frac{1}{c^2} x_{aj} \{x_{ai}, H\}^{(*)}. \quad (3.120)$$

---

<sup>17</sup>Die Weltlinienbedingung enthält also die in der Poincaré-Algebra nicht vorkommenden Größen  $x$  und  $t$ .

# Teil II

## Anwendungen

# Vorbemerkung

In diesem Teil werden die Erzeugenden der Poincaré-Gruppe für post-Newtonische und post-Coulombsche Zweiteilchen-Systeme ermittelt, wobei die Wirkung auf die Ortskoordinaten (für  $H$ ,  $J$ ,  $P$  auch auf die Impulse) der Teilchen vorausgesetzt werden (vgl. Abschnitt 3.4). Es wird verifiziert, dass diese bezüglich der Dirac-Klammer eine Poincaré-Algebra bilden. Im post-Newtonischen Fall wird die Rechnung bis 3pN durchgeführt, wobei dissipative Anteile (2.5pN, 3.5pN)<sup>18</sup>, durch die zeitabhängige Zwangsbedingungen auftreten würden, nicht berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 1.3). Im post-Coulombschen Fall werden ebenfalls dissipative Terme vernachlässigt (1.5pC, 2.5pC). Die Berechnung wird bis 2pC durchgeführt (zur Begründung vgl. Abschnitt 1.4).

Wir beginnen mit der Ableitung der bekannten Ergebnisse der 0-ten Ordnung (wo wir schon einen Teil der Methoden, die wir später benötigen werden, anwenden können) und gehen sukzessiv zu den höheren Approximationen über. Da dabei nur konservative Terme, d.h. Terme in geraden Potenzen in  $\frac{1}{c}$ , berücksichtigt werden, wollen wir zur Vereinheitlichung festlegen, dass wir Gleichungen in  $n$ -ter Näherung stets als modulo  $\frac{1}{c^{2n+2}}$  gültig ansehen<sup>19</sup>.

Alle Größen werden in harmonischer bzw. Lorentz- Eichung berechnet (vgl. Abschnitt 1.2, insbesondere 1.2.2, 1.2.4), um die manifeste Poincaré-Invarianz zu erhalten (Abschnitt 2.1.1). Manifest Poincaré-invariante Lagrangefunktionen mit endlich vielen Freiheitsgraden, die aus klassischen Feldtheorien abgeleitet werden, enthalten aber ab Ordnung  $\varepsilon^2 = \frac{1}{c^4}$  stets höhere Ableitungen in der Ortskoordinate [2] (für beliebige Lagrangefunktionen gilt dies ab  $\varepsilon^3 = \frac{1}{c^6}$  [51]). Ab 2pN/2pC müssen wir also mit Lagrangefunktionen höherer Ordnung arbeiten.

Da wir uns im Falle  $npN$  bzw.  $npC$  unter der gemachten Voraussetzung algebra-

---

<sup>18</sup>Diese lassen sich durch explizit zeitabhängige Terme in die Lagrangefunktion integrieren.

<sup>19</sup>Die Ergebnisse sind aber modulo  $\frac{1}{c^{2n+4}}$  gültig.

isch auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^{2n+2}}]$  befinden<sup>20</sup> und die Terme mit höheren Ableitungen auch in höherer Ordnung auftreten, ist die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion nicht invertierbar. Die Systeme sind also singulär.<sup>21</sup>

Die für die post-Newtonische Näherung ermittelten Ergebnisse können, als Funktionen von  $x$  und  $x^{(1)}$  ausgedrückt, mit einer Arbeit von V. Andrade, L. Blanchet, G. Faye [32] verglichen werden, in der die Größen  $H$ ,  $P_i$ ,  $J_i$  und  $G_i$  mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Noether-Theorems als Integrale der Bewegung aus der 3pN-Lagrangefunktion gewonnen werden.

---

<sup>20</sup>Also dem Ring der Polynome in  $\frac{1}{c^2}$  modulo Terme in  $\frac{1}{c^{2n+2}}$ .

<sup>21</sup>Für eine Herangehensweise unter Benutzung gewöhnlicher Lagrangefunktionen ohne manifesten Poincaré-Invarianz siehe [52].

# Kapitel 4

## Newton'sche und Coulombsche Zweiteilchen-Systeme

### 4.1 Lagrangefunktionen

Die Lagrangefunktionen eines Newtonschen Zweiteilchen-Systems bzw. eines Couloomschen Zweiteilchen-Systems sind durch

$$L_{0pN}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + G\frac{m_1m_2}{r} \quad (4.1)$$

$$L_{0pC}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{e_1e_2}{r} \quad (4.2)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $x_{1/2}$  die Ortsvektoren des 1. bzw. 2. Teilchens (um diese Interpretation herauszustellen, wird statt  $q$  hier  $x$  geschrieben),  $\dot{x}_{1/2}$  die Geschwindigkeitsvektoren und  $r = |x_1 - x_2|$  den Abstand der Punktteilchen.

Als Hesse-Matrix erhalten wir in beiden Fällen:

$$H_{(ai)(bj)} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_{ai} \partial \dot{x}_{bj}} = m_a \delta_{ab} \delta_{ij}. \quad (4.3)$$

Die Systeme sind offensichtlich nichtentartet, sofern die beiden Massen ungleich Null sind.

## 4.2 Hamiltonfunktionen

Da die Hesse-Matrix invertierbar ist, kann man ohne Schwierigkeiten zum Hamilton-Formalismus übergehen. Die kanonischen Impulse lauten

$$p_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ai}} = m_a \dot{x}_{ai} \quad (4.4)$$

und die Poisson-Klammer zweier Funktionen ist

$$\{f, g\} = \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{ai}} \frac{\partial g}{\partial p_{ai}} - \frac{\partial g}{\partial x_{ai}} \frac{\partial f}{\partial p_{ai}}. \quad (4.5)$$

Die Hamiltonfunktionen ergeben sich dann aus der Legendretransformation

$$H = \sum_m \dot{q}_m^i(q, p) p_m - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (4.6)$$

zu

$$H_{0pN}(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (4.7)$$

$$H_{0pC}(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{e_1 e_2}{r}. \quad (4.8)$$

Die physikalische Interpretation dieser Größen als Gesamtenergien legt es nahe, hier bzw. schon zu  $L$  die Ruhemassenenergie  $(m_1 + m_2)c^2$  hinzuzuaddieren. Dies ergibt sich auch aus der Forderung, dass die Poincaré-Algebra für  $c \rightarrow \infty$  in die Galilei-Algebra übergeht. Die Dynamik ändert ein solcher additiver Term nicht, wir müssen aber bedenken, dass wir uns damit strenggenommen nicht mehr auf dem  $R[\varepsilon]$  befinden. Da der Term nur mit  $\varepsilon = 1/c^2$  in die Gleichung (2.27) eingeht (und ansonsten als Konstante verschwindet), resultieren hieraus keine Probleme. Wir wollen zur Vereinfachung der weiteren Argumentation (2.27) ein wenig modifiziert als

$$[G_i, P_j] = \delta_{ij} \left( M + \frac{1}{c^2} H \right) \quad (2.27')$$

$(M = m_1 + m_2)$  schreiben und obige Funktionen  $L$  und  $H$  ohne den additiven Term beibehalten.

### 4.3 Die Erzeugenden $P_i$ , $J_i$ und $G_i$

Aus den Transformationseigenschaften der Koordinaten  $x_{ai}, p_{ai}$  unter Drehung und Translation folgt, dass  $P_i$  und  $J_i$  bezüglich der Poissonklammer (4.5) durch Gesamtmpuls und Gesamtdrehimpuls gegeben sind (vgl. Abschnitt 3.4.2):

$$P_i = \sum_{a=1}^2 p_{ai} \quad (4.9)$$

$$J_i = \sum_{a=1}^2 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_{aj} p_{ak}. \quad (4.10)$$

Die Invarianz der Hamiltonfunktion unter Translationen und Drehungen (2.22, 2.23) ist also äquivalent zur Erhaltung des Gesamtmpulses und des Gesamtdrehimpulses in der Zeit.

$G_i$  ist im Grenzfall  $c \rightarrow \infty$ , also bei Vernachlässigung aller  $1/c$ -abhängigen Terme, physikalisch eine infinitesimale Galilei-Transformation. Das Verhalten der Koordinaten  $x_{ai}$  unter dieser Transformation erhält man nach der in Abschnitt 3.4.3 geleisteten Vorarbeit am einfachsten aus der Weltlinienbedingung. In 0. Ordnung ergibt sich aus (3.119) die Differentialgleichung

$$\{x_{ai}, G_{(0)j}\} = -\delta_{ij}t \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial G_{(0)j}}{\partial p_{ai}} = -\delta_{ij}t. \quad (4.12)$$

(Durch eine Transformation mit Parameter  $v_i$  wird zu jeder Teilchengeschwindigkeit eine infinitesimale Geschwindigkeit  $-v_i$  hinzugefügt.) Für  $G_{(0)i}$  ergibt sich

$$G_{(0)i}(x, p) = G_{(0)i}(x) - \sum_{a=1}^2 p_{ai} t = G_{(0)i}(x) - P_i t. \quad (4.13)$$

Die Abhängigkeit von der Ortskoordinate wollen wir nun mit Hilfe der Poissonklammer-Relationen bestimmen: Wie bereits erwähnt (vgl. Abschnitt 4.2), gelangt man durch  $c \rightarrow \infty$  von der Poincaré-Algebra (2.19)-(2.26), (2.27') zur Galilei-Algebra:

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (4.14)$$

$$[P_i, J_j] = \epsilon_{ijk} P_k \quad (4.15)$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \quad (4.16)$$

$$[H, P_j] = 0 \quad (4.17)$$

$$[H, J_j] = 0 \quad (4.18)$$

$$[G_{(0)i}, G_{(0)j}] = 0 \quad (4.19)$$

$$[G_{(0)i}, H] = P_i \quad (4.20)$$

$$[J_i, G_{(0)j}] = \epsilon_{ijk} G_{(0)k} \quad (4.21)$$

$$[G_{(0)i}, P_j] = \delta_{ij} M \quad (4.22)$$

(Summe über  $k = 1$  bis  $3$ ) mit der Gesamtmasse des Zweiteilchen-Systems  $M = m_1 + m_2$  [53, S. 164ff], [1]. Aus (4.20) folgt nach Einsetzen von (4.13) für  $G_{(0)i}(x)$  mit den Hamiltonfunktionen (4.7) oder (4.8):

$$P_i = \{G_{(0)i}(x), H\} = \sum_{j=1}^3 \frac{p_{1j}}{m_1} \{G_{(0)i}(x), p_{1j}\} + \sum_{j=1}^3 \frac{p_{2j}}{m_2} \{G_{(0)i}(x), p_{2j}\} \quad (4.23)$$

und wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten  $x_{ai}, p_{bj}$ :

$$\{G_{(0)i}(x), p_{aj}\} = \delta_{ij} m_a, \quad a = 1, 2 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial G_{(0)i}(x)}{\partial x_{aj}} = \delta_{ij} m_a, \quad a = 1, 2. \quad (4.25)$$

Durch direktes Integrieren der partiellen Differentialgleichungen (4.12, 4.25) kann man eine Lösung

$$G_{(0)i} = m_1 x_{1i} + m_2 x_{2i} - P_i t \quad (4.26)$$

ermitteln. Tatsächlich ist diese Lösung eindeutig: Sei nämlich  $G'_i$  eine weitere Lösung mit  $G'_{(0)i} = G_{(0)i} + f_i$ . Dann folgt aus (4.12, 4.25), dass  $f_i = \text{const.}$  Aus (4.21) ergibt sich dann

$$0 = \{J_i, f_j\} = \{J_i, G'_{(0)j} - G_{(0)j}\} = \epsilon_{ijk} (G'_{(0)k} - G_{(0)k}) = \epsilon_{ijk} f_k, \quad (4.27)$$

also  $f_i = 0$  oder  $G'_{(0)i} = G_{(0)i}$ . Man verifiziert durch Einsetzen, dass von (4.26) auch die Gleichungen (4.19, 4.21, 4.22) erfüllt werden. Durch (4.26) ist daher die Erzeugende  $G_{(0)i}$  der Galilei-Transformation gegeben, also die Erzeugende der Lorenztransformation bis zur nullten Ordnung.

Man liest aus (4.26) ab, dass  $G_{(0)i}$  physikalisch als Anfangsort des Schwerpunktes interpretiert werden kann, während  $K_{(0)i} = G_{(0)i} + P_i t$  die Schwerpunktkoordinate zu jedem Zeitpunkt angibt. Die Erhaltung von  $G_{(0)i}$

$$\frac{dG_{(0)i}}{dt} = \{G_i, H\} + \frac{\partial G_{(0)i}}{\partial t} \underset{(4.20, 4.26)}{=} 0 \quad (4.28)$$

besagt, dass sich der Schwerpunkt in einem Galilei-invarianten System gradlinig gleichförmig bewegt.

# Kapitel 5

## Zweiteilchen-Systeme in erster Näherung (1pN, 1pC)

Alle Relationen dieses Kapitels sind - soweit nicht anders vermerkt - Relationen auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^4}]$ , gelten also modulo Terme mit  $\frac{1}{c^4}$ .  ${}^nF_{N/C}$  bezeichnet die n-te post-Newtonscche/Coulombsche Ordnung einer Größe  $F$ ,  $F_{n\text{pN/C}}$  die Größe bis zur n-ten post-Newtonscchen/Coulombschen Ordnung berechnet. Skalarprodukte zweier Vektoren  $u, v$  werden als  $(uv)$  geschrieben<sup>1</sup>.

### 5.1 Lagrangefunktionen

Die 1pN-Lagrangefunktion (*Einstein-Infeld-Hoffmann-Lagrangefunktion*) zweier gravitierender Punktteilchen ist unabhängig von der benutzten Eichung gegeben durch [54], [4, S. 547]

$$L_{1\text{pN}} = L_{0\text{pN}} + \frac{1}{c^2} {}^1L_N. \quad (5.1)$$

Der Anteil erster Ordnung lautet explizit:

$$\begin{aligned} {}^1L_N &= \frac{1}{8}m_1\dot{x}_1^4 + \frac{1}{8}m_2\dot{x}_2^4 \\ &+ \frac{Gm_1m_2}{2r} (3(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - 7(\dot{x}_1\dot{x}_2) - (n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)) \\ &- \frac{G^3(m_1m_2(m_1 + m_2))}{2r^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Wir folgen damit der Notation in [32].

mit  $n_{12} = \frac{x_1 - x_2}{r}$ .

Die *Darwinsche* Lagrange-funktion [21, S. 691], [55] eines Zweiteilchen-Systems in 1pC-Näherung erhalten wir aus (1.57) zu

$$L_{1pC} = L_{0pC} + \frac{1}{c^2} {}^1L_C \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} {}^1L_C &= \frac{1}{8}m_1\dot{x}_1^4 + \frac{1}{8}m_2\dot{x}_2^4 \\ &\quad + \frac{e_1e_2}{2r}((\dot{x}_1\dot{x}_2) + (\dot{x}_1n_{12})(\dot{x}_2n_{12})). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Terme, die nur eine Teilchenvariable enthalten, resultieren aus der speziell relativistischen Bewegung der freien Teilchen, sie sind beiden Lagrange-funktionen (wie schon im Newtonschen Fall) gemeinsam.

Als Hesse-Matrix erhalten wir

$$H_{ai\,bj} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_{ai} \partial \dot{x}_{bj}} = m_a \delta_{ab} \delta_{ij} + \frac{1}{c^2} {}^1H_{ai\,bj}. \quad (5.5)$$

(wobei die erste Ordnung für 1pC und 1pN verschieden ist). Als Folge der Invertierbarkeit in nullter Ordnung ist dies auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^4}]$  stets invertierbar.<sup>2</sup> Die Systeme sind also nichtentartet.

## 5.2 Hamiltonfunktionen

Die kanonischen Impulse ergeben sich aus (4.4) zu

$$\begin{aligned} 1pN: \quad p_{ai} &= m_a \dot{x}_{ai} + \frac{1}{c^2} \frac{m_a}{2} \dot{x}_a^2 \dot{x}_{ai} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \frac{Gm_1m_2}{r} (6\dot{x}_{ai} - 7\dot{x}_{a'i} - (n_{12}\dot{x}_{a'i})n_{12}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} 1pC: \quad p_{ai} &= m_a \dot{x}_{ai} + \frac{1}{c^2} \frac{m_a}{2} \dot{x}_a^2 \dot{x}_{ai} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \frac{e_1e_2}{2r} (\dot{x}_{a'i} + (n_{12}\dot{x}_{a'i})n_{12}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dabei bezeichne  $a'$  die Nummer des von  $a$  verschiedenen Teilchens. Die zugehörigen Hamiltonfunktionen (Einstein-Infeld-Hoffmannsche Hamiltonfunktion bzw.

---

<sup>2</sup> Als inverse Matrix ergibt sich  $H_{ai\,bj}^{-1} = \frac{1}{m_a} \delta_{ab} \delta_{ij} + {}^1H_{ai\,bj}^{-1}$ , mit  $m_a m_b {}^1H_{ai\,bj}^{-1} = - {}^1H_{a\,bi}$ .

Darwinsche Hamiltonfunktion) lauten nach (4.6) (vgl. [4, S. 595],[55]):

$$H_{1pN} = H_{0pN} + \frac{1}{c^2} {}^1H_N \quad (5.8)$$

$$H_{1pC} = H_{0pC} + \frac{1}{c^2} {}^1H_C \quad (5.9)$$

$${}^1H_N = -\frac{1}{8} \frac{{p_2}^4}{m_2^3} - \frac{1}{8} \frac{{p_1}^4}{m_1^3}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{G}{r_{12}} \left[ 7(p_1 p_2) - 3 \frac{m_1 {p_2}^2}{m_2} - 3 \frac{m_2 {p_1}^2}{m_1} + (p_2 n_{12}) (p_1 n_{12}) \right] \quad (5.10)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{{r_{12}}^2}$$

$${}^1H_C = -\frac{1}{8} \frac{{p_1}^4}{m_1^3} - \frac{1}{8} \frac{{p_2}^4}{m_2^3} \quad (5.11)$$

$$+ -\frac{1}{2} \frac{e_1 e_2}{r m_1 m_2} [(p_1 p_2) + (n_{12} p_2) (n_{12} p_1)].$$

### 5.3 Die Erzeugenden $P_i$ , $J_i$ und $G_i$

Für  $P_i$  und  $J_i$  ergibt sich nach Abschnitt 3.4.2

$$P_i = \sum_{a=1}^2 p_{ai} \quad (5.12)$$

$$J_i = \sum_{a=1}^2 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_{aj} p_{ak}. \quad (5.13)$$

Die Gleichungen der Poincaré-Algebra (2.19-2.27') sind nun als Gleichungen auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^4}]$  aufzufassen. Bis zur 1. Ordnung sind Gesamtimpuls und Gesamtdreimpuls wegen (2.22, 2.23) erhalten.

Die Weltlinienbedingung (3.119) lautet im Falle 1pN/1pC:

$$\{x_{ai}, G_{(1)j}\} = \frac{1}{c^2} x_{aj} \{x_{ai}, H_{(0)}\} - \delta_{ij} t. \quad (5.14)$$

Die nullte Ordnung dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial {}^0G_j}{\partial p_{ai}} = -\delta_{ij} t \quad (5.15)$$

und die erste Ordnung lautet

$$\frac{\partial {}^1G_j}{\partial p_{ai}} = x_{aj} \{x_{ai}, H_{(0)}\}. \quad (5.16)$$

Für die nullte Ordnung von Gleichung (2.25) der Poincaré-Algebra erhalten wir

$$P_i = \{{}^0G_i, H_{(0)}\} \quad (5.17)$$

und als erste Ordnung ergibt sich:

$$\{{}^1G_i, H_{(0)}\} + \{{}^0G_i, {}^1H\} = 0 \quad (5.18)$$

$$\sum_{a=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{p_{aj}}{m_a} \frac{\partial {}^1G_i}{\partial x_{aj}} = - \sum_{a=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial {}^1G_{aj}}{\partial p_{aj}} \frac{\partial H_{(0)}}{\partial x_{aj}} - \{{}^0G_i, {}^1H\} \quad (5.19)$$

Aus den nullten Ordnungen der beiden Gleichungen folgt zusammen mit der nullten Ordnung von (2.25)

$${}^0G_{N/Ci} = G_{(0)i} \quad (5.20)$$

(vgl. (4.26)).  ${}^1G_i$  kann ermittelt werden, indem man diese Funktion zunächst in zwei Teile aufspaltet  ${}^1G_i = {}^1G_i(x, p) + {}^1G_i(x)$ . Der  $p$ -abhängige Teil wird mit (5.16) ermittelt, der verbleibende Teil  ${}^1G_i(x)$  mit (5.19).

In den Fällen 1pN und 1pC erhält man als Lösungen

$$G_{1pNi} = G_{(0)i} + \frac{1}{c^2} {}^1G_{Ni} \quad (5.21)$$

$$G_{1pCi} = G_{(0)i} + \frac{1}{c^2} {}^1G_{Ci} \quad (5.22)$$

$${}^1G_{Ni} = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{m_1} x_{1i} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{m_2} x_{2i} - \frac{1}{2} \frac{G m_1 m_2}{r} (x_{1i} + x_{2i}) \quad (5.23)$$

$${}^1G_{Ci} = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{m_1} x_{1i} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{m_2} x_{2i} + \frac{1}{2} \frac{e_1 e_2}{r} (x_{1i} + x_{2i}). \quad (5.24)$$

Durch Einsetzen kann man verifizieren, dass  $G_{1pNi}$  und  $G_{1pCi}$  zusammen mit  $P_i, J_i$  und der entsprechenden Hamilton-Funktion auch die übrigen Gleichungen der Poincaré-Algebra erfüllen.

Diese Lösungen sind *eindeutig*: Für die nullte Ordnung folgt das aus Abschnitt

4.3. Nehmen wir an, es existiere noch eine weitere Lösung  $G_{(1)i'}$  die sich in der ersten Ordnung unterscheidet:  ${}^1G'_i = {}^1G_i + {}^1f_i$ . Da beide Größen Lösungen von (5.16) sein sollen, können wir sie in diese Gleichung einsetzen und die Differenz bilden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial {}^1f_j}{\partial p_{ai}} = \frac{\partial({}^1G'_j - {}^1G_j)}{\partial p_{ai}} = 0, \quad (5.25)$$

also  ${}^1f_i = {}^1f_i(x)$ . Danach setzen wir  ${}^1G'_i$  und  ${}^1G_i$  in (5.19) ein, bilden die Differenz und berücksichtigen  ${}^1f_i = {}^1f_i(x)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{p_{aj}}{m_a} \frac{\partial({}^1G'_i - {}^1G_i)}{\partial x_{aj}} &= - \sum_{a=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial({}^1G'_i - {}^1G_i)}{\partial p_{aj}} \frac{\partial H_{(0)}}{\partial x_{aj}} \\ \sum_{a=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{p_{aj}}{m_a} \frac{\partial {}^1f_i(x)}{\partial x_{aj}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

was  $\frac{\partial {}^1f_i(x)}{\partial x_{aj}} = 0$  oder  ${}^1f_i = const$  impliziert, da die  $x_{ai}, p_{bj}$  unabhängige Variablen sind und daher der  $p$ -unabhängige Vorfaktor eines jeden  $p_{aj}$  in (5.26) verschwinden muss.

Die erste Ordnung von Gleichung (2.25) ergibt

$$0 = \{J_i, {}^1f_j\} = \{J_i, {}^1G'_j - {}^1G_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^1G'_k - {}^1G_k) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}^1f_k, \quad (5.27)$$

also  ${}^1f_i = 0$  oder  $G'_{(1)i} = G_{(1)i}$ .

# Kapitel 6

## Zweiteilchen-Systeme in zweiter Näherung (2pN, 2pC)

Abgesehen von den Abschnitten 6.2 und 6.3 sind die Relationen dieses Kapitels Relationen auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^6}]$ , gelten also modulo Terme mit  $\frac{1}{c^6}$ .

### 6.1 Lagrangefunktionen

Die 2pN-Lagrangefunktion für zwei Teilchen wurde zuerst von T. Damour [56] später von S. Kopeikin [57] abgeleitet. Für eine Dreiteilchen-Hamiltonfunktion konnte die Hamiltonfunktion in ADM-Eichung von G. Schäfer [58] ermittelt werden. Wir werden uns auf zwei Teilchen beschränken. Die Lagrangefunktion von Kopeikin enthält quadratische Terme in den Beschleunigungen, die in der von Damour mit Hilfe von Doppel-Null-Termen (vgl. Anschnitt 6.3) eliminiert worden sind. Beide Lagrange-Funktionen unterscheiden sich zusätzlich durch eine totale Zeitableitung. Wir benutzen hier die Lagrangefunktion von T. Damour. Die 2pC-Lagrangefunktion lässt sich wieder aus (1.57) ableiten. Beide haben die Struktur

$$L_{2\text{pN}}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2) = L_{1\text{pN}}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \frac{1}{c^4} {}^2L_N(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2) \quad (6.1)$$

$$L_{2\text{pC}}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2) = L_{1\text{pC}}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \frac{1}{c^4} {}^2L_C(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2) \quad (6.2)$$

mit  ${}^0L_N + \frac{1}{c^2} {}^1L_N = L_{1pN}$  und  ${}^0L_C + \frac{1}{c^2} {}^1L_C = L_{1pC}$ . Der explizite Ausdruck für  ${}^2L_N$  findet sich in Anhang B,  ${}^2L_C$  lautet

$$\begin{aligned} {}^2L_C = & \frac{1}{16}m_1\dot{x}_1^6 \\ & + \frac{1}{8}e_1e_2[(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2 + 2(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2) - \dot{x}_2^2(n_{12}\ddot{x}_1)] \\ & + \frac{1}{16}\frac{e_1e_2}{r}[2(\dot{x}_1\dot{x}_2)^2 - \dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1^2(n_{12}\dot{x}_2)^2 - 3(n_{12}\dot{x}_1)^2(n_{12}\dot{x}_2)^2] \\ & + \frac{1}{16}e_1e_2r[(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\ddot{x}_2) - 3(\ddot{x}_1\ddot{x}_2)] \\ & + 1 \longleftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Beschleunigungen treten in der Ordnung  $\frac{1}{c^4}$  auf, die Hesse-Matrix

$$H_{aibj} = \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 {}^2L_{N/C}}{\partial \ddot{x}_{ai} \partial \ddot{x}_{bj}} \quad (6.4)$$

ist auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^6}]$  nicht invertierbar. Es liegt also ein singuläres System höherer Ordnung vor. Da die Beschleunigungen linear auftreten, ist auch  $\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_{ai} \partial \ddot{x}_{bj}}$  nicht invertierbar.

## 6.2 Hamiltonformalismus für Lagrangefunktionen der Form (6.1, 6.2)

Für eine Lagrangefunktionen der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^N m_a(x_a^{(1)})^2 + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s V_s(x, \dots, x^{(s)}) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.5)$$

( $\varepsilon = \frac{1}{c^2}$ ) sind die im Abschnitt 3.2 beschriebenen Schritte zur Ermittlung der Zwangsbedingungen und der Übergang zum Hamiltonformalismus für beliebige Funktionen  $V_s$  durchführbar. Wir wollen die von X. Jaen, J. Llosa und A. Molina [3] entwickelte Methode nun kurz beschreiben. Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:  $\alpha, \beta$  bezeichnen ein Paar  $(a, i)$ , wobei  $a$  die Teilchennummer ( $a = 1, 2$ ) und  $i$  die Komponente des Vektors bedeutet  $i = 1, \dots, 3$ ,  $m_\alpha \equiv m_a$  ist die Masse des Teilchens mit Nummer  $a$ .

Zunächst sind die Lagrange-Zwangsbedingungen zu bestimmen. Wie wir gesehen

haben, (Abschnitt 3.2.1) müssen wir dazu die Nullvektoren der Hesse-Matrix

$$H_{\alpha\beta} = \varepsilon^n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_\alpha^{(n)} \partial x_\beta^{(n)}} \quad (6.6)$$

zu berechnen. Dazu nehmen X. Jaen, J. Llosa und A. Molina an,  $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_\alpha^{(n)} \partial x_\beta^{(n)}}$  sei invertierbar<sup>1</sup>. Nullvektoren sind dann alle Vektoren, die ein Vielfaches von  $\varepsilon$  sind. Damit erhalten wir als primäre Zwangsbedingungen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$x_\alpha^{(2n)} \frac{\partial^2 L}{\partial x_\alpha^{(n)} \partial x_\beta^{(n)}} + f_\beta(x, \dots, x^{(2n-1)}) = 0 \quad [3.6]$$

die primären Zwangsbedingungen

$$\varepsilon f_\beta(x, \dots, x^{(2n-1)}) = 0. \quad (6.7)$$

Da  $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_\alpha^{(n)} \partial x_\beta^{(n)}}$  invertierbar ist, gibt es keine weiteren primären Zwangsbedingungen.

Für die spezielle Form der Lagrangefunktion (6.5), lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen als

$$-m_\alpha x_\alpha^{(2)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s A_{\alpha s}(x, \dots, x^{(2s)}) = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.8)$$

$$A_{\alpha s} = \sum_{r=0}^s \left( -\frac{d}{dt} \right)^r \frac{\partial V_s}{\partial x_\alpha^{(r)}} \quad (6.9)$$

schreiben, als primäre Zwangsbedingungen ergeben sich also:

$$\varepsilon \left[ -m_\alpha x_\alpha^{(2)} + \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^s A_{\alpha s}(x, \dots, x^{(2s)}) \right] = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.10)$$

Man kann aus diesen eine minimale Menge von zeitlich stabilen Zwangsbedingungen (vgl. Abschnitt 3.2.1)

$$-m_\alpha x_\alpha^{(r)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s B_{\alpha, r, s}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad r = 2, \dots, 2n-1 \quad (6.11)$$

ableiten. Dabei ergeben sich die Zwangsbedingungen und die Funktionen  $B_{\alpha, r, s}$

---

<sup>1</sup>Vgl. dagegen [59],[60].

auf folgende Weise aus den primären Zwangsbedingungen und den  $A_{\alpha s}$ :

Zunächst multipliziert man (6.10) mit  $\varepsilon^{n-1}$  und erhält

$$\varepsilon^n x_\alpha^{(2)} = \varepsilon^n \frac{1}{m_\alpha} A_{\alpha 0}(x) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.12)$$

Dies wird nun  $r$ -mal abgeleitet und sobald  $x_\alpha^{(2)}$  vorkommt, wird es durch (6.12) eliminiert. Es ergibt sich

$$\varepsilon^n x_\alpha^{(2+r)} = \varepsilon^n \frac{1}{m_\alpha} B_{\alpha,2+r,0}(x, x^{(1)}) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.13)$$

Dies ist für  $r = 0, \dots, 2n - 3$  äquivalent zu den den Zwangsbedingungen (6.11) multipliziert mit  $\varepsilon^n$  (höhere Ableitungen sind keine Zwangsbedingungen mehr). Nun wird (6.10) mit  $\varepsilon^{(n-2)}$  multipliziert. Es ergibt sich

$$\varepsilon^{n-1} x_\alpha^{(2)} = \varepsilon^{n-1} \frac{1}{m_\alpha} [A_{\alpha 0}(x) + \varepsilon A_{\alpha 1}(x, x^{(1)}, x^{(2)})] + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.14)$$

Die Beschleunigungsabhängigkeit von  $A_{\alpha 1}(x, x^{(1)}, x^{(2)})$  kann mit (6.13) eliminiert werden:

$$\varepsilon^{n-1} x_\alpha^{(2)} = \varepsilon^{n-1} \frac{1}{m_\alpha} [A_{\alpha 0}(x) + \varepsilon \tilde{A}_{\alpha 1}(x, x^{(1)})] + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.15)$$

Dann wird wieder  $r$ -mal abgeleitet und auftretende Beschleunigungen werden durch Einsetzen von (6.15) eliminiert. Es ergibt sich:

$$\varepsilon^{n-1} x_\alpha^{(2+r)} = \varepsilon^{n-1} \frac{1}{m_\alpha} [B_{\alpha,2+r,0}(x, x^{(1)}) + \varepsilon B_{\alpha,2+r,1}(x, x^{(1)})] + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (6.16)$$

was für  $r = 0, \dots, 2n - 3$  äquivalent zu den den Zwangsbedingungen (6.11) multipliziert mit  $\varepsilon^{n-1}$  ist. Mit diesem Verfahren erhält man nacheinander die Zwangsbedingungen multipliziert mit  $\varepsilon^n, \varepsilon^{n-1}, \dots, \varepsilon^1$  und die entsprechenden  $B_{\alpha,2+r,s}(x, x^{(1)})$ . Damit kann man die höheren Ableitungen in der Bewegungsgleichung eliminieren und man so die Zwangsbedingungen (6.11) erhalten. Tatsächlich sind diese zeitlich stabil: Die Bedingung für zeitliche Stabilität ist

$$-m_a x_\alpha^{(2n)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s B_{\alpha,2n,s}(x, x^{(1)}) \approx O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.17)$$

Einschränken der Bewegungsgleichung auf die Zwangsbedingungsfläche (Elimi-

nieren aller höheren Ableitungen außer  $x_\alpha^{(2n)}$  durch die Zwangsbedingungen) und Einsetzen der Bedingung für zeitliche Stabilität ergibt wieder eine Zwangsbedingung, d. h. die Bewegungsgleichung impliziert auf der Zwangsbedingungsfläche

$$m_\alpha x_\alpha^{(2n)} \approx \sum_{s=0}^n \varepsilon^s B_{\alpha,2n,s}(x, x^{(1)}) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.18)$$

und damit die zeitliche Stabilität.

Sind die Zwangsbedingungen bekannt, so kann man die  $B_{\alpha,2+r,s}(x, x^{(1)})$  ermitteln, indem man die  $r$ -te zeitliche Ableitung von  $A_{\alpha s}(x, \dots, x^{(2s)})$  bildet, wobei auftretende höhere Ableitungen mit Hilfe der Zwangsbedingungen eliminiert werden.

Die Ostrogradski-Transformation kann nun als

$$\Pi_{j\alpha} \equiv m_\alpha x_\alpha^{(1)} \delta_{j0} + \varepsilon^{j+1} \Phi_{j\alpha}(x, \dots, x^{(2n-j-1)}) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.19)$$

$$\Phi_{j\alpha} = \sum_{s=0}^{n-j-1} \varepsilon^s \sum_{l=0}^s \left( -\frac{d}{dt} \right)^l \frac{\partial V_{s+j+1}}{\partial q_\alpha^{(l+j+1)}} \quad (6.20)$$

geschrieben werden. Durch Eliminieren der höheren Ableitungen in (6.19) und Beibehalten der ersten  $n-2$  Zwangsbedingungen können die Zwangsbedingungen in den Hamilton-Formalismus übersetzt werden:

$$\omega_{1\alpha} \equiv x_\alpha^{(1)} - \frac{1}{m_\alpha} [\Pi_{0\alpha} - \varepsilon \Phi_{0\alpha}(x, x^{(1)})] = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.21)$$

$$\omega_{r\alpha} \equiv x_\alpha^{(r)} - \frac{1}{m_\alpha} B_{\alpha r}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad r = 2, \dots, n-1 \quad (6.22)$$

$$\chi_{j\alpha} \equiv \Pi_{j\alpha} - \varepsilon^{j+1} \Phi_{j\alpha}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (6.23)$$

Dabei ist  $B_{\alpha r}(x, x^{(1)}) \equiv \sum_{s=0}^n B_{\alpha,r,s}(x, x^{(1)})$  und  $\Phi_{j\alpha}(x, x^{(1)})$  erhält man aus  $\Phi_{j\alpha}(x, \dots, x^{(2n-j-1)})$  durch Eliminieren der höheren Ableitungen mit den Zwangsbedingungen.

Die Zwangsbedingungen definieren eine Untermannigfaltigkeit  $\Gamma$  des Phasenraums, als deren Koordinaten wir  $x_\alpha, \Pi_{0\alpha}$  wählen können (eine andere Möglichkeit wäre  $x_\alpha, x_\alpha^{(1)}$ ). Man kann außerdem zeigen, dass die Zwangsbedingungen alle zweiter Klasse sind, die Determinante der Poisson-Klammer-Matrix  $D$  der Zwangsbedingungen also nicht verschwindet. Durch ein iteratives Verfahren können die einzelnen Ordnungen von  $D^{-1}$  durch Untermatrizen von  $D$  ausgedrückt werden

(vgl. Anhang D).

Wir können damit auf  $\Gamma$  die Dirac-Klammer einführen. Die zeitliche Entwicklung einer Funktion auf der Zwangsbedingungsfläche ist dann durch

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}^* + \frac{\partial F}{\partial t} \quad [3.63]$$

gegeben. Dabei können die Zwangsbedingungen *vor* Ausrechnen der Klammer eingesetzt werden. Wir werden später jede Funktion auf  $\Gamma$  durch  $(x, \Pi_0)$  ausdrücken. Es ist dann ausreichend, wenn wir die elementaren Dirac-Klammern dieser Variablen berechnen. Dazu muss die inverse Matrix  $D^{-1}$  nicht vollständig bis zur Ordnung  $\varepsilon^{n+1}$  bekannt sein. Die elementaren Dirac-Klammern können durch Untermatrizen von  $D^{-1}$  und Funktionen  $\Phi$  und  $B_{\alpha i}$  ausgedrückt werden.<sup>2</sup> Für ein Zweiteilchen-System mit  $n=2$  lauten die elementaren Dirac-Klammern:

$$\begin{aligned} \{x_\alpha, x_\beta\}^* &= \varepsilon^2 \frac{1}{m_\alpha m_\beta} \left[ \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta^{(1)}} \right] + O(\varepsilon^3) \\ \{x_\alpha, \Pi_{0\beta}\}^* &= \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta} + O(\varepsilon^3) \\ \{\Pi_{0\alpha}, \Pi_{0\beta}\}^* &= O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Daraus kann man auf die bezüglich  $\{., .\}^*$  kanonisch konjugierten Variablen schließen:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= x_\alpha - \varepsilon^2 \frac{1}{m_\alpha} \Phi_{1\alpha}(x, x^{(1)}) + O(\varepsilon^3) \\ P_\alpha &= \Pi_{0\alpha} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Offensichtlich erfüllt  $Q_\alpha$  als Funktion von Ort und Geschwindigkeit nicht mehr die harmonische Eichung (post-Newtonsscher Fall) bzw. ist nicht durch eine Lorentztransformation erreichbar (post-Coulombscher Fall). Damit ist klar, dass keine Beschreibung der Systeme durch kanonische Koordinaten möglich ist, die die entsprechende Eichung respektiert.

---

<sup>2</sup>Gleichung 26a)-c) in [3], allerdings gibt es im letzten Term von 26c) einen Druckfehler, es muss

$$Y_{k\mu, l\nu} \left[ \frac{\partial \Phi_{k\mu}}{\partial q_\alpha} \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial B_{\nu l}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \Phi_{k\mu}}{\partial q_\beta} \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial B_{\nu l}}{\partial q_\alpha} \right], \quad (6.24)$$

heißen, der Faktor  $\frac{1}{m_\nu}$  fehlt.

### 6.3 Verallgemeinerung der Methode von Ref. [3]

Ein Doppel-Null-Term ist ein Produkt zweier Terme, die bei Einsetzen der Bewegungsgleichung in niedrigster Ordnung null werden.<sup>3</sup> Wir können solche Terme in höchster Ordnung in die Lagrange-Funktion einsetzen, ohne die Dynamik zu verändern [55]<sup>4</sup>. Damit können in höchster Ordnung die Summanden, die quadratisch in den höheren Ableitungen sind, hinzugefügt oder eliminiert werden. Um die Methode von [3] anwenden zu können, müssten wir Doppel-Null-Terme zur 2pN-Lagrange-Funktion hinzufügen, da  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_N}{\partial x_{ai}^{(2)} \partial x_{bj}^{(2)}}$  nicht invertierbar ist. Tatsächlich ist das nicht nötig:

Wir wollen nun zeigen, dass man die Methode von [3] anwenden kann, auch wenn  $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_{ai}^{(n)} \partial x_{bj}^{(n)}}$  nicht invertierbar ist.

Nehmen wir an,  $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_{ai}^{(n)} \partial x_{bj}^{(n)}}$  sei nicht invertierbar,  $V_n$  hänge aber von allen  $x_{ai}^{(n)}$  ab. Dann besitzt (6.6) zunächst alle Vielfachen von  $\varepsilon$  als Nullvektoren und zusätzlich noch  $R$  Vektoren  $\lambda_{ra}$ . Die Kontraktion mit einem dieser Vektoren führt nicht zu identisch erfüllten Zwangsbedingungen, da die Euler-Lagrange-Gleichungen in nullter Ordnung unabhängig voneinander sind. Es treten also keine beliebigen Funktionen der Zeit auf. Wir bestimmen zunächst die Zwangsbedingungen, die aus der Kontraktion der Bewegungsgleichung mit Vielfachen von  $\varepsilon$  resultieren. Da in die Ableitung der Zwangsbedingungen in Abschnitt 6.2 die Invertierbarkeit von  $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_{ai}^{(n)} \partial x_{bj}^{(n)}}$  nicht einging, können wir die Herleitung übernehmen. Es ergeben sich wieder die Zwangsbedingungen (6.11).

Die zusätzlichen Nullvektoren hängen nur von  $x, \dots, x^{(n)}$  ab, da  $H_{\alpha\beta}$  nur von diesen Variablen abhängt. Mit (6.10) ergeben sich die primären Zwangsbedingungen

$$\sum_{\alpha} \lambda_{r\alpha}(x, \dots, x^{(n)}) \left[ -m_{\alpha} x_{\alpha}^{(2)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s A_{\alpha s}(x, \dots, x^{(2s)}) \right] = O(\varepsilon^{n+1}), \quad r = 1, \dots, R \quad (6.27)$$

wobei  $x^{(2n)}$  in dieser Kombination nicht vorkommt. Dieser Ausdruck darf auf die bereits ermittelte Zwangsbedingungsfläche eingeschränkt werden. Das heißt, wir

---

<sup>3</sup>Dies ist verallgemeinerbar, typisch ist aber ein Vorkommen in höchster Ordnung, wo die Bewegungsgleichung in niedrigster Ordnung ausreicht.

<sup>4</sup>Beliebige Zeitableitungen dieser Terme sind wieder null, wenn man die Bewegungsgleichungen in niedrigster Ordnung einsetzt. Für die partiellen Ableitungen nach  $x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  gilt die Produktregel. Daher gehen diese Terme in die Bewegungsgleichungen nicht ein.

dürfen für  $x^{(2)}, \dots, x^{(2n-1)}$  die Zwangsbedingungen (6.11) einsetzen. Wir haben aber gesehen (vgl. Abschnitt 6.2), dass das Ersetzen der Variablen in  $A_{\alpha s}$  durch die Zwangsbedingungen auf  $B_{\alpha,2,s}$  führt ( $s = 0, \dots, n$ ). Wir erhalten für (6.27):

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \lambda_{r\alpha}(x, \dots, x^{(n)}) \left[ -m_{\alpha} x_{\alpha}^{(2)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s A_{\alpha s}(x, \dots, x^{(2s)}) \right] \\ & \approx \sum_{\alpha} \lambda_{r\alpha}(x, x^{(1)}) \left[ -m_{\alpha} x_{\alpha}^{(2)} + \sum_{s=0}^n \varepsilon^s B_{\alpha,2,s}(x, x^{(1)}) \right] \stackrel{(6.11)}{\approx} O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die zusätzlichen Nullvektoren erzeugen also keine weiteren Zwangsbedingungen, das Verfahren ist auch für Systeme mit singulärem  $\frac{\partial^2 {}^{(n)}L}{\partial x_{ai}^{(n)} \partial x_{bj}^{(n)}}$  anwendbar, auch dann, wenn die Hesse-Matrix verschwindet, wie bei den von uns betrachteten Systemen.<sup>5</sup>

## 6.4 Hamiltonfunktionen

Die 2pN-und 2pC-Hamiltonfunktionen ergeben sich mit den Ostrogradski-Impulsen (3.7) bzw. (6.19) und mit

$$H = -L + \sum_{j=0}^{n-1} \Pi_{jm} q_m^{(j+1)}. \quad [3.17]$$

Wir geben  $H$  durch die Koordinaten  $(q, \Pi_0)$  ausgedrückt an. Für  $H_{2pN}$  erhalten wir:

$$H_{2pN} = {}^0H_N + \frac{1}{c^2} {}^1H_N + \frac{1}{c^4} {}^2H_N \quad (6.29)$$

mit den expliziten Ausdrücken

$$\begin{aligned} {}^0H_N &= \frac{{\Pi_{01}}^2}{2m_1} + \frac{{\Pi_{02}}^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \\ {}^1H_N &= -\frac{1}{8} \frac{{\Pi_{01}}^4}{m_2^3} - \frac{1}{8} \frac{{\Pi_{02}}^4}{m_1^3} \end{aligned} \quad (6.30)$$

---

<sup>5</sup>Insbesondere ändern Doppel-Null-Terme den Formalismus nicht: Unabhängig vom Hinzufügen von Doppel-Null-Termen ist der Formalismus durchführbar. In die Bewegungsgleichungen gehen die Terme nicht ein, damit auch nicht in die Zwangsbedingungen. Auch aus den Koordinaten und Impulsen werden sie eliminiert, sobald man diese durch  $(x, \Pi_0)$  ausdrückt, da die Bewegungsgleichung nullter Ordnung eine zeitlich stabile Zwangsbedingung ist.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{G}{r_{12}} \left[ 7 (\Pi_{01}\Pi_{02}) - 3 \frac{m_1 \Pi_{01}^2}{m_2} - 3 \frac{m_2 \Pi_{02}^2}{m_1} \right. \\
& \quad \left. + (\Pi_{01}n_{12}) (\Pi_{02}n_{12}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r_{12}^2} \\
{}^2H_N = & \frac{1}{16} \frac{\Pi_{01}^6}{m_1^5} \\
& + \frac{1}{16} \frac{G}{m_1^2 r m_2^2} \left[ 10 \frac{m_2^3 \Pi_{01}^4}{m_1} - 15 m_1 m_2 \Pi_{02}^2 \Pi_{01}^2 \right. \\
& \quad + 14 m_1 m_2 (\Pi_{02}n_{12})^2 \Pi_{01}^2 - 4 m_2^2 (\Pi_{02}n_{12}) (\Pi_{01}n_{12}) \Pi_{01}^2 \\
& \quad + 4 m_2^2 (\Pi_{01}\Pi_{02}) \Pi_{01}^2 - 2 m_1 m_2 (\Pi_{01}\Pi_{02})^2 \\
& \quad - 12 m_1 m_2 (\Pi_{02}n_{12}) (\Pi_{01}n_{12}) (\Pi_{01}\Pi_{02}) \\
& \quad \left. - 3 m_1 m_2 (\Pi_{01}n_{12})^2 (\Pi_{02}n_{12})^2 \right] \\
& + \frac{1}{8} \frac{G^2}{r^2 m_1 m_2} \left[ 22 m_2^3 \Pi_{01}^2 + 47 m_1 m_2^2 \Pi_{01}^2 - 4 m_2^3 (\Pi_{01}n_{12})^2 \right. \\
& \quad - 70 m_1^2 m_2 (\Pi_{01}\Pi_{02}) + 16 m_1^2 m_2 (\Pi_{01}n_{12}) (\Pi_{02}n_{12}) \\
& \quad \left. - 13 m_1 m_2^2 (\Pi_{01}n_{12})^2 \right] \\
& - \frac{G^3 m_1 m_2}{r^3} \left[ -19 m_1 m_2 - 4 m_1^2 \right] \\
& + 1 \longleftrightarrow 2. \tag{6.31}
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet „ $+1 \longleftrightarrow 2$ “, dass der gesamte Ausdruck noch einmal mit vertauschten Teilchenindizes dazuaddiert wird. Dies schließt auch in den Teilchenindizes symmetrische Terme ein.

Die 2pC-Hamiltonfunktion lautet:

$$H_{2pC} = {}^0H_C + \frac{1}{c^2} {}^1H_C + \frac{1}{c^4} {}^2H_C \tag{6.32}$$

mit den expliziten Ausdrücken

$${}^0H_C = \frac{\Pi_{01}^2}{2m_1} + \frac{\Pi_{02}^2}{2m_2} + \frac{e_1 e_2}{r} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned} {}^1H_C &= -\frac{1}{8}\frac{{\Pi_{01}}^4}{{m_1}^3} - \frac{1}{8}\frac{{\Pi_{02}}^4}{{m_2}^3} \\ &\quad + -\frac{1}{2}\frac{e_1 e_2}{r m_1 m_2} [(\Pi_{01}\Pi_{02}) + (n_{12}\Pi_{02})(n_{12}\Pi_{01})] \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} {}^2H_C &= \frac{1}{16}\frac{{\Pi_{01}}^6}{{m_1}^5} \\ &\quad + \frac{1}{16}\frac{e_1 e_2}{{m_1}^2 {m_2}^2 r} \left[ {\Pi_{02}}^2 {\Pi_{01}}^2 - 2 (\Pi_{02} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2 \right. \\ &\quad + 4 \frac{m_2 (\Pi_{02} n_{12}) (\Pi_{01} n_{12}) {\Pi_{01}}^2}{m_1} + 4 \frac{m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2}{m_1} \\ &\quad \left. - 2 (\Pi_{01} \Pi_{02})^2 + 3 (\Pi_{01} n_{12})^2 (\Pi_{02} n_{12})^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8}\frac{e_2^2 e_1^2}{r^2 {m_1}^2 m_2} [{\Pi_{01}}^2 + 3 (\Pi_{01} n_{12})^2] \\ &\quad + \frac{e_2^3 e_1^3}{8 m_1 m_2 r^3} \\ &\quad + 1 \longleftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dies ergibt bis zur ersten Ordnung wieder die funktionale Form der 1pN/1pC-Größen, da  $\Pi_0$  nach (3.8-3.10) bis zur ersten Ordnung mit  $p$  übereinstimmt. Die 2pN-Terme können überprüft werden, indem man sie durch die Koordinaten  $(x, x^{(1)})$  der Zwangsbedingungsfläche ausdrückt. Sie stimmen dann mit dem 2pN-Term der Energiefunktion in [32] überein. Die 2pC-Terme werden durch das Ergebnis von T. Damour und G. Schäfer in [61] bestätigt.

Die beiden Lagrangefunktionen von T. Damour und S. Kopeikin sind bis auf einen Doppel-Null-Term und die totale Zeitableitung einer Funktion  $M$  identisch. Damit hängen die Hamiltonfunktionen über eine verallgemeinerte kanonische Transformation zusammen. Geht man zu kanonisch konjugierten Variablen über, so ergibt sich eine kanonische Transformation. Bemerkenswert ist, dass man hier für  $L' := L + \varepsilon \frac{d}{dt} M_1(x) + \varepsilon^2 \frac{d}{dt} M_2(x, x^{(1)}) = L + \frac{d}{dt} \tilde{M}(x, x^{(1)})$  nach dem Übergang zu kanonisch konjugierten Koordinaten sogar dieselbe Erzeugende wie im gewöhnlichen Fall erhält:  $F_2(Q, P') = Q_\alpha P'_\alpha - \tilde{M}(Q, P')$ . Weil  $M$  nicht explizit zeitabhängig ist, müssen nur die Koordinaten mit der entsprechenden Erzeugenden ineinander umgerechnet werden um von einer Funktion zur anderen zu gelangen, was als zusätzlicher Test für die Richtigkeit der Ergebnisse benutzt wurde.

## 6.5 Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$

Auf dem prolongierten Phasenraum der Zweiteilchen-Systeme 2pN und 2pC sind Impuls und Drehimpuls nach Abschnitt 3.4.2 durch

$$P_i = \sum_{a=1}^2 \Pi_{0ai} = \Pi_{01i} + \Pi_{02i} \quad (6.36)$$

$$J_i = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} x_{aj}^{(s)} \Pi_{sak} = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} x_{aj} \Pi_{0ak} + \epsilon_{ijk} x_{aj}^{(1)} \Pi_{1ak} \quad (6.37)$$

gegeben. (Hier und im Rest des Abschnittes soll über  $j, k$  summiert werden.) Die Einschränkung auf die Zwangsbedingungsfläche ergibt (mit den Bezeichnungen von Abschnitt 6.2) in Koordinaten  $(q, \Pi_0)$  geschrieben

$$P_i|_\Gamma = \Pi_{01i} + \Pi_{02i} \quad (6.38)$$

$$J_i|_\Gamma = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} (x_{aj} - \varepsilon^2 \frac{1}{m_a} \Phi_{1aj}(x, \Pi_0)) \Pi_{0ak}, \quad (6.39)$$

wobei  $\Phi_{1aj}(x, \Pi_0) = \Phi_{1aj}(x, x^{(1)}(x, \Pi_0))$ . Eine Newtonsche Substitution ist hier ausreichend, nach (6.21) gilt  $x_\alpha^{(1)}(x, \Pi_0) = \frac{\Pi_{0\alpha}}{m_\alpha} + O(\varepsilon)$ . Explizit lautet der Ausdruck für  $J_i$  im Newtonschen bzw. Coulombschen Fall:

$$J_{2pNi} = {}^0J_{Ni} + \frac{1}{c^4} {}^2J_{Ni} \quad (6.40)$$

$${}^0J_{Ni} = \epsilon_{ijk} x_{1j} \Pi_{01k} + \epsilon_{ijk} x_{2j} \Pi_{02k} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} {}^2J_{Ni} = & -\epsilon_{ijk} \frac{7}{4} \frac{G}{m_1} (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01j} \Pi_{02k} \\ & + \epsilon_{ijk} \frac{1}{8} \frac{G}{rm_1 m_2} ((n_{12} \Pi_{02})^2 m_1 - 7m_1 \Pi_{02}^2) x_{1j} \Pi_{01k} \\ & + \epsilon_{ijk} \frac{1}{8} \frac{G}{rm_1 m_2} ((n_{12} \Pi_{02})^2 m_1 - 7m_1 \Pi_{02}^2) x_{1j} \Pi_{02k} \\ & + 1 \longleftrightarrow 2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$J_{2pCi} = {}^0J_{Ci} + \frac{1}{c^4} {}^2J_{Ci} \quad (6.43)$$

$${}^0 J_{Ci} = \epsilon_{ijk} x_{1j} \Pi_{01k} + \epsilon_{ijk} x_{2j} \Pi_{02k} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} {}^2 J_{Ci} = & \epsilon_{ijk} e_1 e_2 \frac{1}{4} \frac{(\Pi_{01} n_{12}) \Pi_{01j} \Pi_{02k}}{m_2 m_1^2} \\ & + \epsilon_{ijk} \frac{1}{8} \frac{e_1 e_2}{r m_1^2 m_2^2} (m_1 \Pi_{02}^2 - m_1 (\Pi_{02} n_{12})^2) x_{1j} \Pi_{01k} \\ & + \epsilon_{ijk} \frac{1}{8} \frac{e_1 e_2}{r m_1^2 m_2^2} (-m_2 \Pi_{01}^2 + m_2 (\Pi_{01} n_{12})^2) x_{1j} \Pi_{02k} \quad (6.45) \\ & - \epsilon_{ijk} \frac{1}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{r^2 m_1 m_2} x_{1j} (\Pi_{01k} - \Pi_{02k}) \\ & + 1 \longleftrightarrow 2 \end{aligned}$$

Mit  $P_{2pN}$ ,  $J_{2pN}$  können nach Umrechnung auf Koordinaten  $(x, x^{(1)})$  durch die Ergebnisse von [32] bis zur zweiten Ordnung bestätigt werden.

Bis zur zweiten Ordnung in  $\frac{1}{c^2}$  treten keine Korrekturen zur gewohnten Form des Gesamtmpulses auf. Für den Gesamtdrehimpuls gilt dies bis zur ersten Ordnung. Geht man zu kanonisch konjugierten Koordinaten  $(Q, P)$  über, so ergibt sich mit (6.26) aus (6.38, 6.39)

$$\tilde{P}_i = \sum_{a=1}^2 P_{ai} \quad (6.46)$$

$$\tilde{J}_i = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} Q_{aj} P_{ak}, \quad (6.47)$$

dabei bezeichnet  $\tilde{P}_i = P_i(x(Q, P), \Pi_0(Q, P))$  die durch kanonische Koordinaten ausgedrückte Größe.  $P_i$  bzw.  $J_i$  sind also bezüglich kanonisch konjugierter Variablen wieder die Erzeugenden der gewöhnlichen Translation bzw. Drehung. Der Grund ist, dass die Zwangsbedingungen unter Translation bzw. Rotation forminvariant sind, d. h. dass die Zwangsbedingungsfläche bei einer solchen Transformation in sich übergeht. Die Einschränkung der Translation/Drehung ist damit eine Translation/Drehung auf  $\Gamma$  und die Erzeugenden einer Translation/Drehung nehmen bezüglich kanonisch konjugierter Koordinaten die Form (6.46, 6.47) an. Es ist klar, dass damit auch die Euklidische Algebra (2.19-2.21) erfüllt ist, ferner gelten die Relationen (2.22, 2.23), d. h. die verallgemeinerten Größen Gesamtmpuls und Gesamtdrehimpuls sind bis zur 2. Ordnung erhalten bzw. die Hamiltonfunktion ist invariant unter Translation und Drehung im Phasenraum.

## 6.6 Die Erzeugende $G_i$

Hier ist es zweckmäßig, zu kanonisch konjugierten Koordinaten zu wechseln und  $\tilde{K}_i$  zu bestimmen. Zur Berechnung bieten sich zwei Methoden an:

1. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten [52]: Das Transformationsverhalten von  $\tilde{K}_i$  unter Drehungen ist durch (2.26) gegeben, d. h.  $\tilde{K}_i$  lautet

$$\tilde{K}_i = \sum_{a=1}^2 M_a(Q, P) Q_{ai} + N_a(Q, P) P_{ai} \quad (6.48)$$

mit zwei skalaren Funktionen  $M_a(Q, P)$ ,  $N_a(Q, P)$ . Aufgrund der algebraischen Struktur der Differentialgleichungen für  $\tilde{K}_i$  liegt es nahe, für  $M_a(Q, P)$  und  $N_a(Q, P)$  Summen von Monomen

$$c_{n_0 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} R^{n_0} (P_1^2)^{n_1} (P_2^2)^{n_2} (P_1 P_2)^{n_3} (\tilde{n}_{12} P_1)^{n_4} (\tilde{n}_{12} P_2)^{n_5} \quad (6.49)$$

anzusetzen, mit einer ganzen Zahl  $n_0$  und natürlichen Zahlen  $n_1, \dots, n_5$ . Die zu berücksichtigenden Tupel  $n_0, \dots, n_5$  ergeben sich dann aus der Dimension der entsprechenden Ordnung von  $\tilde{K}_i$ . Die im Fall 3pN auftretenden ln-Terme werden gesondert berücksichtigt. Eingesetzt in die partiellen Differentialgleichungen (2.24-2.27', 3.120) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten. Die Koeffizienten wären überbestimmt, allerdings sind nicht alle Gleichungen unabhängig: Für unsere Systeme existiert eine Lösung. Berücksichtigt man nur die Gleichungen der Poincaré-Algebra, bleiben Koeffizienten unbestimmt.<sup>6</sup>

2. Explizite Integration: Das Differentialgleichungssystem aus Weltlinienbedingung (3.119) und Gleichung (2.25) der Poincaré-Algebra lässt sich elementar integrieren (vgl. die Abschnitte 4.3, 5.3). Nach Bestimmen einer Lösung wird durch Einsetzen geprüft, ob durch sie alle Gleichungen der Poincaré-Algebra erfüllt werden.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten ist besonders bei höheren Ordnungen von Vorteil, wenn ein Computeralgebraprogramm eingesetzt wird.<sup>7</sup> Die Ergebnisse wurden für 2pN und 2pC mit Methode 2 von Hand überprüft. Nach

---

<sup>6</sup>Bei Anwendung des Verfahrens auf das 1pN/1pC-System erhält man einen unbestimmten Faktor  $\alpha$  als Teil eines Terms  $\alpha\Lambda$ , mit dem Runge-Lenz-Vektor  $\Lambda$ , vgl. Anhang A.

<sup>7</sup>Hier wurde Maple 8 verwendet.

der Berechnung wird  $\tilde{K}_i$  wieder durch die Koordinaten  $(x, \Pi_0)$  ausgedrückt.

Für das post-Newtonische bzw. das post-Coulombsche Zweiteilchen-System ergibt sich:

$$K_{2pNi} = {}^0K_{Ni} + \frac{1}{c^2} {}^1K_{Ni} + \frac{1}{c^4} {}^2K_{Ni} \quad (6.50)$$

$${}^0K_{Ni} = m_1 x_{1i} + m_2 x_{2i} \quad (6.51)$$

$${}^1K_{Ni} = \frac{1}{2} \frac{{\Pi_{01}}^2}{m_1} x_{1i} + \frac{1}{2} \frac{{\Pi_{02}}^2}{m_2} x_{2i} - \frac{1}{2} \frac{G m_1 m_2}{r} (x_{1i} + x_{2i}) \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} {}^2K_N &= -\frac{1}{8} \frac{x_{1i} {\Pi_{01}}^4}{m_1^3} \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{G}{m_1 m_2} \left[ 7 {m_2}^2 n_{12i} {\Pi_{01}}^2 - 14 m_1 m_2 (n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} \right. \\ &\quad \left. - 14 {m_2}^2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i} - {m_2}^2 n_i (n_{12} \Pi_{01})^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{G}{r} \left[ -6 \frac{{m_2} x_{1i} {\Pi_{01}}^2}{m_1} + x_{1i} (n_{12} \Pi_{01}) (n_{12} \Pi_{02}) \right. \\ &\quad \left. + 7 x_{1i} (\Pi_{01} \Pi_{02}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{G^2 m_1 m_2}{r^2} [-5 m_1 + 7 m_2] x_{1i} \\ &\quad + 1 \longleftrightarrow 2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$K_{2pCi} = {}^0K_{Ci} + \frac{1}{c^2} {}^1K_{Ci} + \frac{1}{c^4} {}^2K_{Ci} \quad (6.54)$$

$${}^0K_{Ci} = m_1 x_{1i} + m_2 x_{2i} \quad (6.55)$$

$${}^1K_{Ci} = \frac{1}{2} \frac{{\Pi_1}^2}{m_1} x_{1i} + \frac{1}{2} \frac{{\Pi_2}^2}{m_2} x_{2i} + \frac{1}{2} \frac{e_1 e_2}{r} (x_{1i} + x_{2i}) \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned}
{}^2K_{Ci} = & -\frac{1}{8} \frac{{x_{1i}}^4 \Pi_{01}^4}{m_1^3} \\
& + \frac{1}{8} \frac{e_1 e_2}{m_1 m_2} \left[ -\frac{{m_2 n_{12i}}^2 \Pi_{01}^2}{m_1} + 2(n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{m_2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i}}{m_1} + \frac{m_2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{01})^2}{m_1} \right] \\
& - \frac{1}{4} \frac{e_1 e_2}{r m_1 m_2} [(\Pi_{01} \Pi_{02}) + (n_{12} \Pi_{01})(n_{12} \Pi_{02})] x_{1i} \\
& - \frac{1}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{r m_2} n_{12i} \\
& + 1 \longleftrightarrow 2
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Das Ergebnis für 2pN stimmt – nach entsprechender Umrechnung – mit dem Ergebnis in [32] bis zur zweiten Ordnung überein.

## 6.7 Die Eindeutigkeit des Ergebnisses

Wir werden zeigen, dass  $\tilde{K}_{(2)i}$  im Falle 2pN/2pC eindeutig bestimmt ist. Damit sind auch  $K_{(2)i}$  und  $G_{(2)i}$  eindeutig bestimmt<sup>8</sup>. Betrachten wir zunächst die Weltlinienbedingung in kanonischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\{x_{ai}, K_{(2)j}\}^*|_{x(Q,P), \Pi(Q,P)} &= \{\tilde{x}_{ai}, \tilde{K}_j\}_{Q,P} \\
&= \{Q_{ai} + \varepsilon^2 \frac{1}{m_a} \tilde{\Phi}_{1ai}, {}^0\tilde{K}_j + \varepsilon {}^1\tilde{K}_j + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}_j\}_{Q,P} \\
&\stackrel{(3.120)}{=} \varepsilon \tilde{x}_{aj} \{\tilde{x}_{ai}, \tilde{H}\}_{Q,P} \\
&= \varepsilon \tilde{x}_{aj} \{{}^0\tilde{H}\}_{Q,P} + \varepsilon^2 \tilde{x}_{aj} \{{}^1\tilde{H}\}_{Q,P}. \tag{6.58}
\end{aligned}$$

Gleichung (2.25) lautet

$$\{\tilde{K}_j, \tilde{H}\}_{Q,P} = \{{}^0\tilde{K}_j + \varepsilon {}^1\tilde{K}_j + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}_j, {}^0\tilde{H} + \varepsilon {}^1\tilde{H} + \varepsilon^2 {}^2\tilde{H}\}_{Q,P} \stackrel{(2.25)}{=} \tilde{P}_j \tag{6.59}$$

---

<sup>8</sup>Die Koordinatentransformation ist ein Diffeomorphismus und  $P_i$  ist eindeutig bestimmt (vgl. Abschnitt 6.5).

Wie in Abschnitt 6.5 begründet, hat  $\tilde{J}_i$  die Form  $\tilde{J}_i = \sum_{a=1}^2 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} Q_{aj} P_{ak}$  (vgl. (6.47)). Damit ergibt Gleichung (2.26):

$$\begin{aligned} \{\tilde{J}_i, \tilde{K}_j\}_{Q,P} &= \{\tilde{J}_i, {}^0\tilde{K}_j\}_{Q,P} + \varepsilon \{\tilde{J}_i, {}^1\tilde{K}_j\}_{Q,P} + \varepsilon^2 \{\tilde{J}_i, {}^2\tilde{K}_j\}_{Q,P} \\ &\stackrel{(2.26)}{=} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^0\tilde{K}_k + \varepsilon {}^1\tilde{K}_k + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}_k). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Da kanonisch konjugierte Variablen und Phasenraumvariablen in 0-ter Ordnung übereinstimmen, behält die nullte Ordnung der Hamiltonfunktion  $\tilde{H}$  die Form

$${}^0\tilde{H} = \sum_{a=1}^2 \frac{P_a^2}{2m_a} + U(Q). \quad (6.61)$$

Für die nullte und die erste Ordnung der Gleichungen können wir aufgrund der Form von  ${}^0\tilde{H}$ ,  $J_i$  und  $\{\cdot, \cdot\}_{Q,P}$  genauso vorgehen wie in den Abschnitten 4.3 und 5.3 um die Eindeutigkeit der nullten und ersten Ordnung zu zeigen, nur dass statt der Koordinaten  $x, p$  stets  $Q, P$  eingesetzt werden muss, die einzelnen Größen eine Tilde bekommen und wir mit  $\tilde{K}_i$  statt mit  $G_i$  arbeiten:

Wir nehmen also wieder an, es gäbe eine zweite Lösung  $\tilde{K}'_i = \tilde{K}_i + f_i$  mit  $f_i = f_i(Q, P)$ . Wir entnehmen zunächst der nullten Ordnungen der Gleichung (6.58), dass  ${}^0f_i$  nicht von den  $P_{ai}$  abhängt: Gleichung (6.58) muss nach Voraussetzung von  $\tilde{K}'_i$  und von  $\tilde{K}_i$  erfüllt werden. Bilden der Differenz ergibt in der nullten Ordnung:

$$\frac{\partial {}^0f_j}{\partial P_{ai}} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^0f_i = {}^0f_i(Q). \quad (6.62)$$

$\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$  werden in (6.59) eingesetzt und es wird wieder die Differenz gebildet. In nullter Ordnung ergibt sich

$$\sum_{a=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{P_{ak}}{m_a} \frac{\partial {}^0f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} = 0. \quad (6.63)$$

Wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten  $Q_{ai}, P_{bj}$  also

$$\frac{\partial {}^0f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^0f_i = const \quad (6.64)$$

Aus der nullten Ordnung von Gleichung (6.60) folgt schließlich

$$0 = \{\tilde{J}_i, {}^0f_j\}_{Q,P} = \{\tilde{J}_i, {}^0\tilde{K}'_j - {}^0\tilde{K}_j\}_{Q,P} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^0\tilde{K}'_k - {}^0\tilde{K}_k) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}^0f_k \\ \Rightarrow {}^0f_k = 0 \Rightarrow {}^0\tilde{K}'_i = {}^0\tilde{K}_i. \quad (6.65)$$

Der Beweis der Eindeutigkeit der ersten Ordnung ist sehr ähnlich: Aus der ersten Ordnung von (6.58) folgt  ${}^1f_i = {}^1f_i(Q)$ . Die erste Ordnung von (6.59) ist

$$\{{}^1\tilde{K}_j, {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} + \{{}^0\tilde{K}_j, {}^1\tilde{H}\}_{Q,P} = 0, \quad (6.66)$$

wobei  $\tilde{K}'_j$  dieselbe Gleichung erfüllt. Wir wissen aus (6.65), dass  $\tilde{K}'_i$  von  $\tilde{K}_i$  frühestens in der ersten Ordnung abweicht, also  $\tilde{K}'_i = {}^0\tilde{K}_i + \varepsilon {}^1\tilde{K}'_i + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}'_i$ . Subtraktion der Gleichung (6.66) mit  $\tilde{K}_j$  von der mit  $\tilde{K}'_j$  ergibt daher in erster Ordnung:

$$\{{}^1\tilde{K}_j - {}^1\tilde{K}'_j, {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = \{{}^1f_j(Q), {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = 0 \\ \sum_{a=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{P_{ak}}{m_a} \frac{\partial {}^1f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} = 0 \\ \frac{\partial {}^1f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} = 0, \quad (6.67)$$

also  ${}^1f_j(Q) = \text{const}$ . Aus der ersten Ordnung von Gleichung (6.60) folgt dann

$$0 = \{\tilde{J}_i, {}^1f_j\}_{Q,P} = \{\tilde{J}_i, {}^1\tilde{K}'_j - {}^1\tilde{K}_j\}_{Q,P} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^1\tilde{K}'_k - {}^1\tilde{K}_k) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}^1f_k \\ \Rightarrow {}^1f_k = 0 \Rightarrow {}^1\tilde{K}'_i = {}^1\tilde{K}_i. \quad (6.68)$$

Die Eindeutigkeit der zweiten Ordnung folgt völlig analog: Wir wissen nun, dass  $\tilde{K}'_i = {}^0\tilde{K}_i + \varepsilon {}^1\tilde{K}_i + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}'_i$  gilt. Setzt man nacheinander  $\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$  in Gleichung (6.58) ein und bildet die Differenz, bleibt nur der Term übrig, der  ${}^2\tilde{K}'_j - {}^2\tilde{K}_j$  enthält:

$$\frac{\partial ({}^2\tilde{K}'_j - {}^2\tilde{K}_j)}{\partial P_{ai}} = \frac{\partial {}^2f_j}{\partial P_{ai}} = 0. \quad (6.69)$$

Es folgt  ${}^2f_i = {}^0f_i(Q)$ . Gleichung (6.59) ergibt

$$\{{}^2\tilde{K}_j - {}^2\tilde{K}'_j, {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = \{{}^2f_j(Q), {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = 0. \quad (6.70)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Koordinaten  $P_{ai}, Q_{bj}$  können wir schließen:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{P_{ak}}{m_a} \frac{\partial^2 f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.71)$$

also  ${}^2f_i = \text{const.}$  Einsetzen von von  $\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$  in Gleichung (6.60) und Differenzbildung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 = \{\tilde{J}_i, {}^2f_j\}_{Q,P} &= \{\tilde{J}_i, {}^2\tilde{K}'_j - {}^2\tilde{K}_j\}_{Q,P} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^2\tilde{K}'_k - {}^2\tilde{K}_k) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}^2f_k \\ \Rightarrow \quad {}^2f_k &= 0 \quad \Rightarrow \quad {}^2\tilde{K}'_i = {}^2\tilde{K}_i. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Dieser Induktionsbeweis lässt sich auch auf höhere Ordnung anwenden. Insbesondere ist klar, dass wir im Falle 3pN völlig analog verfahren können.

# Kapitel 7

## Das post-Newtonssche Zweiteilchen-System in dritter Ordnung

Die Ordnungen 2.5pN und 3.5pN werden hier vernachlässigt. Alle Relationen dieses Abschnitts sind Relationen auf  $R[\frac{1}{c^2}]/[\frac{1}{c^8}]$ .

### 7.1 Lagrangefunktion

Die 3pN-Bewegungsgleichung wurde im Jahr 2000 von T. Damour, P. Jaranowski und G. Schäfer [62] in ADM-Eichung abgeleitet und unabhängig davon von L. Blanchet und G. Faye [63] in harmonischen Koordinaten. Die Lagrangefunktion für die konservativen Terme findet sich in harmonischer Eichung in [32]. Sie hat die Struktur

$$L_{3pN}(x, x^{(1)}, x^{(2)}) = L_{2pN}(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \frac{1}{c^6} {}^3L_N(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} &= {}^0L_N(x, x^{(1)}) + \frac{1}{c^2} {}^1L_N(x, x^{(1)}) + \frac{1}{c^4} {}^2L_N(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{c^6} {}^3L_N(x, x^{(1)}, x^{(2)}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

Explizit findet sich  $L_{3pN}$  in Anhang A. Die Lagrangefunktion besitzt nicht die Form (6.5), wir müssen den Formalismus von X. Jaen, J. Llosa und A. Molina entsprechend modifizieren: Wir wollen  ${}^3L_N$  als kleine Änderung des Terms  ${}^2L_N$

ansehen, in der Notation von Abschnitt 6.2 also die Lagrangefunktion

$$L = L_0 + V_0(x) + \varepsilon V_1(x, x^{(1)}) + \varepsilon^2 \tilde{V}_2(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \quad (7.3)$$

mit  $\tilde{V}_2(x, x^{(1)}, x^{(2)}) = V_2(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \varepsilon V_3(x, x^{(1)}, x^{(2)})$  betrachten. Die wesentliche Veränderung gegenüber Kapitel 6 ist, dass alle Größen nun bis  $O(\varepsilon^4)$  ausgerechnet werden müssen. In Anhang C wird gezeigt, dass aus den primären Zwangsbedingungen, die man durch Multiplikation der Bewegungsgleichungen mit  $\varepsilon^2$  erhält, wieder eine zeitlich stabile minimale Menge

$$m_\alpha x_\alpha^{(r)} - \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s B_{\alpha,r,s}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^4), \quad r = 2, 3 \quad [C.6]$$

von Zwangsbedingungen abgeleitet werden kann. Weitere Nullvektoren der Hesse-Matrix führen auch hier nicht zu neuen Zwangsbedingungen.

## 7.2 Hamiltonfunktion

Die Ostrogradski-Transformation ergibt:

$$\Pi_{0\alpha} = m_\alpha x_\alpha^{(1)} + \varepsilon \Phi_{0\alpha}(x, \dots, x^{(3)}) \quad (7.4)$$

$$\Pi_{1\alpha} = \varepsilon^2 \Phi_{1\alpha}(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \quad (7.5)$$

wobei die Funktionen  $\Phi_{j\alpha}$  bezüglich  $V_1$  und  $\tilde{V}_2$  gebildet werden:

$$\Phi_{0\alpha} = \frac{\partial V_1}{\partial x_\alpha^{(1)}} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \varepsilon \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x_\alpha^{(2)}} \quad (7.6)$$

$$\Phi_{1\alpha} = \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x_\alpha^{(2)}}. \quad (7.7)$$

Daraus folgen als Zwangsbedingungen im Hamilton-Formalismus die Relationen

$$\begin{aligned} \chi_{1\alpha} &= \Pi_{1\alpha} - \varepsilon^2 \Phi_{1\alpha}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^4) \\ \omega_{1\alpha} &= q_\alpha^{(1)} - \frac{1}{m_\alpha} [\Pi_{0\alpha} - \varepsilon \Phi_{0\alpha}(x, x^{(1)})] = O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (7.8)$$

$\Phi_{s\alpha}(x, x^{(1)})$  erhält man, indem man die höheren Ableitungen in  $\Phi_{j\alpha}(x, \dots, x^{(2n-j-1)})$  mit Hilfe der Zwangsbedingungen eliminiert.

Als Hamiltonfunktion ergibt sich

$$H_{3\text{pN}} = -L_{3\text{pN}} + \sum_{\alpha} \Pi_{0\alpha} x_{\alpha}^{(1)} + \Pi_{1\alpha} x_{\alpha}^{(2)} \quad (7.9)$$

$$= H_{2\text{pN}} + {}^3H_N. \quad (7.10)$$

Durch Koordinaten  $(x, \Pi_0)$  der Zwangsbedingungsfläche ausgedrückt, lautet der explizite Ausdruck für  ${}^3H_N$ :

$$\begin{aligned} {}^3H_N = & -\frac{5}{128} \frac{{\Pi_{01}}^8}{m_1^7} \\ & + \frac{1}{32} \frac{G}{r m_1^2 m_2^2} \left[ -14 \frac{m_2^3 {\Pi_{01}}^6}{m_1^3} + 58 \frac{m_2 {\Pi_{02}}^2 {\Pi_{01}}^4}{m_1} + 28 \frac{m_2^2 (\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{02} n_{12}) {\Pi_{01}}^4}{m_1^2} \right. \\ & - 28 \frac{m_2^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^4}{m_1^2} - 36 \frac{m_2 (\Pi_{02} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^4}{m_1} + 12 \frac{m_2 (\Pi_{01} n_{12})^2 (\Pi_{02} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} \\ & + 8 \frac{m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} - 12 (\Pi_{02} n_{12})^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2 - 20 \frac{m_1 (\Pi_{02} n_{12})^4 {\Pi_{01}}^2}{m_2} \\ & - 4 (\Pi_{02} n_{12})^3 (\Pi_{01} n_{12}) {\Pi_{01}}^2 - 17 {\Pi_{02}}^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2 - 8 \frac{m_2 {\Pi_{02}}^2 (\Pi_{01} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} \\ & + 16 \frac{m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) (\Pi_{02} n_{12}) (\Pi_{01} n_{12}) {\Pi_{01}}^2}{m_1} + 25 {\Pi_{02}}^2 (\Pi_{02} n_{12}) (\Pi_{01} n_{12}) {\Pi_{01}}^2 \\ & - 10 (\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{01} \Pi_{02})^2 (\Pi_{02} n_{12}) - 2 (\Pi_{01} \Pi_{02})^3 + 5 (\Pi_{01} n_{12})^3 (\Pi_{02} n_{12})^3 \\ & \left. + 15 (\Pi_{01} n_{12})^2 (\Pi_{02} n_{12})^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) \right] \\ & + \frac{1}{144} \frac{G^2}{r^2} \left[ -957 \frac{m_2 {\Pi_{01}}^4}{m_1^2} - 261 \frac{m_2^2 {\Pi_{01}}^4}{m_1^3} - 90 \frac{m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2}{m_1^2} \right. \\ & + 654 \frac{(\Pi_{02} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_2} + 798 \frac{{\Pi_{02}}^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} + 1848 \frac{m_2 (\Pi_{01} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1^2} \\ & - 705 \frac{(\Pi_{02} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} + 1938 \frac{(\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2}{m_1} - 2310 \frac{(\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{02} n_{12}) {\Pi_{01}}^2}{m_1} \\ & + 36 \frac{m_2^2 (\Pi_{01} n_{12})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1^3} - 1428 \frac{(\Pi_{01} \Pi_{02})^2}{m_1} - 3192 \frac{(\Pi_{01} n_{12})^2 (\Pi_{01} \Pi_{02})}{m_1} \\ & \left. - 1078 \frac{(\Pi_{01} n_{12})^3 (\Pi_{02} n_{12})}{m_1} + 1146 \frac{(\Pi_{01} n_{12})^2 (\Pi_{02} n_{12})^2}{m_1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3660 \frac{(\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{01} \Pi_{02}) (\Pi_{02} n_{12})}{m_1} - 104 \frac{m_2 (\Pi_{01} n_{12})^4}{m_1^2} \Big] \\
& + \frac{1}{20160} \frac{G^3}{r^3} \left[ -501760 m_2^2 \Pi_{01}^2 - 85680 \frac{m_2^3 \Pi_{01}^2}{m_1} - 496736 m_1 m_2 \Pi_{01}^2 \right. \\
& \quad - 12915 m_2^2 \pi^2 \Pi_{01}^2 + 147840 m_1 m_2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) \Pi_{01}^2 + 562256 m_1^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) \\
& \quad + 30240 \frac{m_2^3 (\Pi_{01} n_{12})^2}{m_1} + 174720 m_2^2 (\Pi_{01} n_{12})^2 + 977808 m_1 m_2 (\Pi_{01} n_{12})^2 \\
& \quad - 982848 m_1^2 (\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{02} n_{12}) - 38745 m_1 m_2 \pi^2 (\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{02} n_{12}) \\
& \quad + 38745 m_2^2 \pi^2 (\Pi_{01} n_{12})^2 + 12915 m_1 m_2 \pi^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) + 547120 m_1 m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) \\
& \quad - 149520 m_1 m_2 (\Pi_{01} n_{12}) (\Pi_{02} n_{12}) - 147840 m_1^2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) (\Pi_{01} \Pi_{02}) \\
& \quad \left. + 443520 m_1^2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) (\Pi_{02} n_{12}) (\Pi_{01} n_{12}) - 443520 m_2 m_1 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) (\Pi_{01} n_{12})^2 \right] \\
& + \frac{1}{840} \frac{G^4}{r^4} \left[ 315 m_1^4 m_2 + 17427 m_1^3 m_2^2 - 3080 m_1^3 m_2^2 \lambda \right. \\
& \quad \left. - 6160 m_1^3 m_2^2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) \right] \\
& + 1 \longleftrightarrow 2. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Dies stimmt - durch  $(x, x^{(1)})$  ausgedrückt - mit dem Ergebnis in [32] überein.

### 7.3 Die Erzeugenden $P_i$ und $J_i$

Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls sind wie in Abschnitt 6.5 durch

$$P_i = \sum_{a=1}^2 \Pi_{0ai} = \Pi_{01i} + \Pi_{02i} \tag{7.12}$$

$$J_i = \sum_{s=0}^{(n-1)} \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} x_{aj}^{(s)} \Pi_{sak} = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} x_{aj}^{(0)} \Pi_{0ak} + \epsilon_{ijk} x_{aj}^{(1)} \Pi_{1ak} \tag{7.13}$$

gegeben. (Über  $j, k$  wird hier und im Rest des Abschnittes summiert.) Die Einschränkung auf die Zwangsbedingungsbedingungsfläche lautet

$$\Pi_i|_\Gamma = \Pi_{01i} + \Pi_{02i} \tag{7.14}$$

$$J_i|_{\Gamma} = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} (x_{aj} - \varepsilon^2 \frac{1}{m_a} \Phi_{1aj}(x, \Pi_0)) \Pi_{0ak} \quad (7.15)$$

wobei die einzelnen Größen bis zu einer Genauigkeit von  $O(\varepsilon^4)$  des Ausdrucks durch  $(x, \Pi_0)$  ausgedrückt werden. Explizit lautet das Resultat für  $J_i$ :

$$\begin{aligned} J_{3pNi} &= J_{2pNi} + \varepsilon^3 {}^3J_{Ni} \\ {}^3J_{Ni} &= \epsilon_{ijk} \frac{1}{24} \frac{G}{m_1^2 m_2^2} \left[ 9m_2 (n_{12}, \Pi_{02}) (n_{12}, \Pi_{01})^2 - 3m_2 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{02}) \right. \\ &\quad - 3 \frac{m_2^2 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{01})}{m_1} + 6m_2 (n_{12}, \Pi_{01}) (\Pi_{01}, \Pi_{02}) \\ &\quad \left. + 10 \frac{m_2^2 (n_{12}, \Pi_{01})^3}{m_1} \right] \Pi_{01j} \Pi_{02k} \\ &\quad + \epsilon_{ijk} \frac{1}{16} \frac{G}{rm_1^2 m_2^2} \left[ 7m_2 \Pi_{02}^2 \Pi_{01}^2 - m_2 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{02})^2 \right. \\ &\quad + 8m_1 \Pi_{02}^2 (n_{12}, \Pi_{01}) (n_{12}, \Pi_{02}) - 2m_1 (n_{12}, \Pi_{01}) (n_{12}, \Pi_{02})^3 \\ &\quad - \frac{m_1^2 (n_{12}, \Pi_{02})^4}{m_2} - 6m_1 (n_{12}, \Pi_{02})^2 (\Pi_{01}, \Pi_{02}) + 14 \frac{m_1^2 \Pi_{02}^4}{m_2} \\ &\quad \left. + 10m_2 \Pi_{02}^2 (n_{12}, \Pi_{01})^2 + 3 \frac{m_1^2 \Pi_{02}^2 (n_{12}, \Pi_{02})^2}{m_2} \right] q_{1j} \Pi_{01k} \\ &\quad + \epsilon_{ijk} \frac{1}{16} \frac{G}{rm_1^2 m_2^2} \left[ (2m_2 (n_{12}, \Pi_{02}) (n_{12}, \Pi_{01})^3 - 3 \frac{m_2^2 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{01})^2}{m_1} \right. \\ &\quad - 10m_1 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{02})^2 - 14 \frac{m_2^2 \Pi_{01}^4}{m_1} + m_1 \Pi_{02}^2 (n_{12}, \Pi_{01})^2 \\ &\quad - 8m_2 \Pi_{01}^2 (n_{12}, \Pi_{02}) (n_{12}, \Pi_{01}) + \frac{m_2^2 (n_{12}, \Pi_{01})^4}{m_1} - 7m_1 \Pi_{02}^2 \Pi_{01}^2 \\ &\quad \left. + 6m_2 (n_{12}, \Pi_{01})^2 (\Pi_{01}, \Pi_{02}) \right] q_{1j} \Pi_{02k} \\ &\quad + \epsilon_{ijk} \frac{1}{24} \frac{G^2}{r} \left[ 193 (n_{12}, \Pi_{01}) + 17 \frac{m_2 (n_{12}, \Pi_{01})}{m_1} \right] \Pi_{01j} \Pi_{02k} \\ &\quad + \epsilon_{ijk} \frac{1}{48} \frac{G^2}{r^2} \left[ 21 \frac{m_2 (n_{12}, \Pi_{01})^2}{m_1} - 408 \frac{m_2 \Pi_{01}^2}{m_1} - 68 \frac{m_1 \Pi_{02}^2}{m_2} \right. \\ &\quad + 48 (n_{12}, \Pi_{01}) (n_{12}, \Pi_{02}) - 109 \Pi_{02}^2 + 100 \frac{m_1 (n_{12}, \Pi_{02})^2}{m_2} \\ &\quad \left. - 76 (n_{12}, \Pi_{02})^2 + 816 (\Pi_{01}, \Pi_{02}) \right] q_{1j} \Pi_{01k} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_{ijk} \frac{1}{48} \frac{G^2}{r^2} \left[ -21 \frac{m_1 (n_{12}, \Pi_{02})^2}{m_2} - 100 \frac{m_2 (n_{12}, \Pi_{01})^2}{m_1} \right. \\
& + 76 (n_{12}, \Pi_{01})^2 - 816 (\Pi_{01}, \Pi_{02}) + 68 \frac{m_2 \Pi_{01}^2}{m_1} + 408 \frac{m_1 \Pi_{02}^2}{m_2} \\
& \left. + 109 \Pi_{01}^2 - 48 (n_{12}, \Pi_{01}) (n_{12}, \Pi_{02}) \right] q_{1j} \Pi_{02k} \\
& + 1 \longleftrightarrow 2. \tag{7.17}
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse für  $P_i$  und  $J_i$  stimmen mit [32] überein.

Die Zwangsbedingungen sind weiterhin zweiter Klasse, die Matrix ihrer Poisson-Klammern  $D$  ist umkehrbar. In Anhang C werden die inverse Matrix und damit die elementaren Dirac-Klammern berechnet. Man verifiziert dann durch Einsetzen, dass

$$P_\alpha = \Pi_{0\alpha} - \varepsilon^3 \sum_\gamma \frac{1}{m_\gamma} \Phi_{1\gamma}(x, \Pi_0) \frac{\partial \Phi_{0\gamma}(x, \Pi_0)}{\partial x_\alpha} \tag{7.18}$$

$$Q_\alpha = x_\alpha - \varepsilon^2 \frac{1}{m_\alpha} \Phi_{1\alpha}(x, \Pi_0) + \varepsilon^3 \sum_\gamma \frac{1}{m_\gamma} \Phi_{1\gamma}(x, \Pi_0) \frac{\partial \Phi_{0\gamma}(x, \Pi_0)}{\partial \Pi_{0\alpha}} \tag{7.19}$$

bezüglich der Dirac-Klammer kanonisch konjugiert sind. Da die Zwangsbedingungen weiterhin forminvariant unter Rotation und Translation sind, haben  $J$  und  $P$  in kanonischen Koordinaten wieder die Form

$$\tilde{P}_i = \sum_{a=1}^2 P_{ai} \tag{7.20}$$

$$\tilde{J}_i = \sum_{a=1}^2 \epsilon_{ijk} Q_{aj} P_{ak}, \tag{7.21}$$

## 7.4 Die Erzeugende $G_i$

Wir bestimmen  $\tilde{K}_i$ , mit  $\tilde{K}_i = K_i(Q, P) = G_i(Q, P) + P_i(Q, P)t$  aus der Poincaré-Algebra und der Weltlinienbedingung. Dabei wird die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwendet. Nach Umrechnen auf Koordinaten  $(x, \Pi_0)$  ergibt sich

$$K_{3\text{pN}} = K_{2\text{pN}} + \varepsilon^3 {}^3K_{\text{N}}, \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}
{}^3K_N = & \frac{1}{16} \frac{{\Pi_{01}}^6 x_{1i}}{{m_1}^5} \\
& + \frac{1}{48} \frac{G}{{m_1}^2 {m_2}^2} \left[ -42 \frac{{m_2}^3 n_{12i} {\Pi_{01}}^4}{m_1} - 6 \frac{{m_2}^3 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i} {\Pi_{01}}^2}{m_1} \right. \\
& \quad - 6 {m_2}^2 (n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} {\Pi_{01}}^2 - 30 m_1 m_2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{02})^2 {\Pi_{01}}^2 \\
& \quad - 24 {m_2}^2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{02}) (n_{12} \Pi_{01}) {\Pi_{01}}^2 - 9 \frac{{m_2}^3 n_{12i} (n_{12} \Pi_{01})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1} \\
& \quad + 18 m_1 m_2 (n_{12} \Pi_{02})^2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i} - 48 m_1 m_2 \Pi_{02}^2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i} \\
& \quad + 12 m_1 m_2 (n_{12} \Pi_{02}) (\Pi_{01} \Pi_{02}) \Pi_{01i} + 20 {m_1}^2 (n_{12} \Pi_{02})^3 \Pi_{01i} \\
& \quad + 20 \frac{{m_2}^3 (n_{12} \Pi_{01})^3 \Pi_{01i}}{m_1} + 18 {m_2}^2 (n_{12} \Pi_{02}) (n_{12} \Pi_{01})^2 \Pi_{01i} \\
& \quad - 48 {m_1}^2 \Pi_{02}^2 (n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} + 12 {m_2}^2 (n_{12} \Pi_{01}) (\Pi_{01} \Pi_{02}) \Pi_{01i} \\
& \quad + 3 \frac{{m_2}^3 n_{12i} (n_{12} \Pi_{01})^4}{m_1} + 6 {m_2}^2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{02}) (n_{12} \Pi_{01})^3 \\
& \quad \left. + 18 {m_2}^2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{01})^2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) \right] \\
& + \frac{1}{16} \frac{G}{r} \left[ 21 \frac{{m_2} x_{1i} {\Pi_{01}}^4}{{m_1}^3} + 14 \frac{x_{1i} (n_{12} \Pi_{02})^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1 m_2} + 2 \frac{x_{1i} (\Pi_{01} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2}{{m_1}^2} \right. \\
& \quad - 15 \frac{x_{1i} \Pi_{02}^2 {\Pi_{01}}^2}{m_1 m_2} - 2 \frac{x_{1i} (n_{12} \Pi_{01}) (n_{12} \Pi_{02}) {\Pi_{01}}^2}{{m_1}^2} - 2 \frac{x_{1i} (\Pi_{01} \Pi_{02})^2}{m_1 m_2} \\
& \quad - 12 \frac{x_{1i} (n_{12} \Pi_{01}) (n_{12} \Pi_{02}) (\Pi_{01} \Pi_{02})}{m_1 m_2} + 2 \frac{x_{1i} \Pi_{02}^2 (\Pi_{01} \Pi_{02})}{{m_2}^2} \\
& \quad - 2 \frac{x_{1i} \Pi_{02}^2 (n_{12} \Pi_{02}) (n_{12} \Pi_{01})}{{m_2}^2} - 3 \frac{x_{1i} (n_{12} \Pi_{01})^2 (n_{12} \Pi_{02})^2}{m_1 m_2} \\
& \quad \left. - 11 \frac{m_1 x_{1i} {\Pi_{02}}^4}{{m_2}^3} \right] \\
& + \frac{1}{48} \frac{G^2}{r} \left[ -299 m_2 n_{12i} {\Pi_{01}}^2 + 68 \frac{{m_2}^2 n_{12i} {\Pi_{01}}^2}{m_1} + 34 \frac{{m_2}^2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i}}{m_1} \right. \\
& \quad + 428 m_2 (n_{12} \Pi_{01}) \Pi_{01i} + 386 m_2 (n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} + 76 m_1 (n_{12} \Pi_{02}) \Pi_{01i} \\
& \quad + 48 m_1 (n_{12} \Pi_{02}) (n_{12} \Pi_{01}) n_{12i} - 100 \frac{{m_2}^2 n_{12i} (n_{12} \Pi_{01})^2}{m_1} \\
& \quad \left. + 13 m_2 (n_{12} \Pi_{01})^2 n_{12i} + 816 m_1 n_{12i} (\Pi_{01} \Pi_{02}) \right] \\
& + \frac{1}{3360} \frac{G^2}{r^2} \left[ 21140 m_2 (\Pi_{01} \Pi_{02}) x_{1i} - 50540 m_1 (\Pi_{01} \Pi_{02}) x_{1i} \right. \\
& \quad \left. + 21210 {m_2}^2 {\Pi_{01}}^2 x_{1i} - 10640 m_1 (n_{12} \Pi_{01}) (n_{12} \Pi_{02}) x_{1i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1470m_1\Pi_{02}^2x_{1i} - 5670m_2(n_{12}\Pi_{01})^2x_{1i} - 1680\frac{m_2^2(n_{12}\Pi_{01})^2x_{1i}}{m_1} \\
& + 9240\frac{m_2^2\Pi_{01}^2x_{1i}}{m_1} + 17360m_2(n_{12}\Pi_{01})(n_{12}\Pi_{02})x_{1i} \\
& + 210m_1(n_{12}\Pi_{02})^2x_{1i} \Big] \\
& + \frac{1}{2520}\frac{G^3}{r^3} \left[ -5985m_1^2m_2^2 - 28702m_1m_2^3 \right. \\
& \left. - 18480m_1^3m_2\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + 27442m_1^3m_2 + 18480m_1m_2^3\ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right] x_{1i} \\
& + 1 \longleftrightarrow 2. \tag{7.23}
\end{aligned}$$

Eine Umrechnung auf Koordinaten  $(x, x^{(1)})$  zeigt auch hier die vollständige Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das V. Andrade, L. Blanchet, G. Faye im Lagrangeformalismus abgeleitet haben [32]<sup>1</sup>.

## 7.5 Die Eindeutigkeit des Ergebnisses

Die Eindeutigkeit von  $P_i$  und  $J_i$  folgt aus der physikalischen Forderung, dass es sich um die Erzeugenden von räumlicher Translation und räumlicher Drehung handeln möge. Der Beweis findet sich in Abschnitt 3.4.2. Das Vorgehen zum Beweis der Eindeutigkeit von  $G_{3pNi}$  ist bereits aus den Abschnitten 4.3, 5.3 und besonders 6.7 vertraut: Man wechselt zu kanonisch konjugierten Koordinaten und nimmt an, es gäbe zwei Lösungen,  $\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$ , die die Poincaré-Algebra und die Weltlinienbedingung für  $\tilde{K}_i$ , ((3.120) in kanonischen Koordinaten) erfüllen. Die Weltlinienbedingung lautet in kanonischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\{x_{ai}, K_j\}^*|_{x(Q,P), \Pi(Q,P)} &= \{\tilde{x}_{ai}, \tilde{K}_j\}_{Q,P} \\
&\stackrel{(3.120)}{=} \varepsilon \tilde{x}_{aj} \{\tilde{x}_{ai}, \tilde{H}\}_{Q,P} \tag{7.24}
\end{aligned}$$

Diese Größe muss bis zur dritten Ordnung berechnet werden. Der Beweis, dass  $\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$  bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen, kann aus Abschnitt 6.7 übernommen werden. Wir wissen dann, dass  $\tilde{K}'_i = {}^0\tilde{K}_i + \varepsilon {}^1\tilde{K}_i + \varepsilon^2 {}^2\tilde{K}_i + \varepsilon^3 {}^3\tilde{K}'_i$  gilt und setzen  $\tilde{K}'_i = \tilde{K}_i + \varepsilon^3 {}^3f_i$ . Sowohl  $\tilde{K}'_i$  als auch  $\tilde{K}_j$  lösen Gleichung (7.24)

---

<sup>1</sup>Es sei darauf hingewiesen, dass  $K_i$  in [32] die Erhaltungsgröße ist (also unser  $G_i$ ) und unser  $K_i$  mit  $G_i$  bezeichnet wird.

nach Voraussetzung. Wir setzen sie nun nacheinander in (7.24) ein und bilden die Differenz. Es ergibt sich:

$$0 = \frac{\partial( {}^3\tilde{K}'_j - {}^3\tilde{K}_j)}{\partial P_{ai}} = \frac{\partial {}^3f_j}{\partial P_{ai}} \Rightarrow {}^3f_i = {}^3f_i(Q). \quad (7.25)$$

Gleichung (2.25) lautet in kanonischen Koordinaten:

$$\{{}^3\tilde{K}_j, {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = {}^3P_j, \quad (7.26)$$

Einsetzen von  $\tilde{K}'_j$  und  $\tilde{K}_j$ , Bilden der Differenz und Verwenden von (7.25) ergibt:

$$\{{}^3\tilde{K}_j - {}^3\tilde{K}'_j, {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = \{{}^3f_j(Q), {}^0\tilde{H}\}_{Q,P} = 0. \quad (7.27)$$

Da die einzelnen Koordinaten  $P_{ai}, Q_{bj}$  unabhängig sind, können wir schließen:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{P_{ak}}{m_a} \frac{\partial {}^3f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial {}^3f_j(Q)}{\partial Q_{ak}} &= 0, \end{aligned} \quad (7.28)$$

also  ${}^3f_j = \text{const.}$  Gleichung (2.26) lautet in kanonischen Koordinaten

$$\{{}^3\tilde{K}_i, {}^3\tilde{K}_j\}_{Q,P} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \tilde{K}_k. \quad (7.29)$$

Nun werden  $\tilde{K}'_i$  und  $\tilde{K}_i$  eingesetzt und die Differenz gebildet. Unter Benutzung von (7.28) ergibt die dritte Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 = \{{}^3\tilde{K}_i, {}^3f_j\}_{Q,P} &= \{{}^3\tilde{K}_i, {}^3\tilde{K}'_j - {}^3\tilde{K}_j\}_{Q,P} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} ({}^3\tilde{K}'_k - {}^3\tilde{K}_k) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}^3f_k \\ \Rightarrow {}^3f_k &= 0 \Rightarrow {}^3\tilde{K}'_i = {}^3\tilde{K}_i. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. Es verbleibt lediglich die Freiheit, innerhalb der harmonischen Eichung kanonische Transformationen durchzuführen, die die expliziten Ausdrücke  $H, P_i, J_i$  und  $G_i$  in äquivalente überführen (vgl. Abschnitt 6.4).

## Fazit

Im ersten Teil wurden die theoretischen Grundlagen ausführlich dargestellt. Es wurde gezeigt, wie sich der singuläre Hamiltonformalismus in einfacher Weise auf Systeme höherer Ordnung (in den zeitlichen Ableitungen der Koordinaten) übertragen lässt.

Im zweiten Teil wurden die Zweiteilchen-Systeme 3pN (in harmonischer Eichung) und 2pC (in Lorentz-Eichung) unter Vernachlässigung dissipativer Terme im singulären Hamiltonformalismus höherer Ordnung behandelt. Zur Berechnung der Hamiltonfunktion und der Dirac-Klammern griffen wir auf eine allgemeine Methode von X. Jaen, J. Llosa, A. Molina [3] zurück. Wir konnten zeigen, dass sie auch auf Systeme anwendbar ist, bei denen die Determinante der Hesse-Matrix verschwindet. Damit war eine direkte Behandlung aller gegebenen Lagrangefunktionen bis zur zweiten Ordnung möglich. Die von uns ermittelte Hamiltonfunktion des 2pC-Zweiteilchen-Systems konnte durch die von G. Schäfer, T. Damour in Ref. [61] angegebene bestätigt werden. Für das 3pN-System musste die Methode aufgrund der Struktur der Lagrangefunktion (dritte Zeitableitungen kommen nicht vor) modifiziert werden.

Mit der expliziten Form der Dirac-Klammer konnten wir zeigen, dass für die betrachteten Systeme die Ortskoordinaten nicht als kanonische Koordinaten verwendet werden können. Es wurden Koordinaten angegeben, die bezüglich der Dirac-Klammer kanonisch konjugiert sind, die entsprechenden Eichungen aber nicht respektieren. Solche Koordinaten sind nützlich, weil sie Rechnungen mit der Dirac-Klammer vereinfachen.

Post-Newtonische Systeme in harmonischer Eichung und post-Coulombsche Systeme in Lorentz-Eichung sind manifest Poincaré-invariant. Wir konnten für die Zweiteilchen-Systeme 3pN (in harmonischer Eichung) und 2pC (in Lorentz-Eichung) explizit infinitesimale Erzeugende verallgemeinerter kanonischer Transformationen bestimmen, die bezüglich der Dirac-Klammer eine genäherte Darstellung der Poincaré-Algebra bilden (also Erzeugende der Poincaré-Gruppe sind).

Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass diese eindeutig bestimmt sind, wenn

man die Erzeugende  $H$  als Erzeugende der Zeittranslation (Hamiltonfunktion) als gegeben ansieht und physikalisch fordert, dass die anderen Erzeugenden die üblichen Wirkungen auf die Ortskoordinaten und die Impulskoordinaten haben. Es soll sich also um die Erzeugenden der räumlichen Translation ( $P_i$ ), der räumlichen Drehung ( $J_i$ ) und der homogenen Lorentztransformation ( $G_i$ ) handeln. Letzteres bedeutet, dass  $G_i$  die *Weltlinienbedingung* erfüllt. Damit ist Ref. [1] für die Zweiteilchen-Systeme 3pN (in harmonischer Eichung) und 2pC (in Lorentz-Eichung) bis zur dritten bzw. zweiten Ordnung erweitert worden.

Die Erzeugenden sind gleichzeitig Erhaltungsgrößen des Systems. Sie lassen sich als Gesamtenergie ( $H$ ), als verallgemeinerter Gesamtmoment (P<sub>i</sub>), als verallgemeinerter Gesamtdrehimpuls ( $J_i$ ) und (etwas ungenau gesprochen) als verallgemeinerte Schwerpunktskoordinate ( $G_i$ ) interpretieren. Für das post-Newtonssche System in harmonischer Eichung sind diese Erhaltungsgrößen in Abhängigkeit von den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten der Teilchen von V. Andrade, L. Blanchet, G. Faye [32] im Lagrangeformalismus bis zur dritten Ordnung bestimmt worden. Drückt man die von uns ermittelten Erzeugenden mit Hilfe der Zwangsbedingungen durch die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten aus (sie bleiben weiterhin infinitesimale Erzeugende verallgemeinerter kanonischer Transformationen bezüglich der Dirac-Klammer), so stimmen sie mit den im Lagrangeformalismus ermittelten Erhaltungsgrößen überein.

# Anhang A

## Bemerkung zu Ref. [1]

Die Frage der Eindeutigkeit von  $G_i$  ist auch im Hinblick auf [1] interessant: In diesem Artikel wird die Poincaré-Algebra zusammen mit der Hamiltonfunktion in 0-ter Ordnung

$$H_0 = \sum_a \left( m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} \right) + \sum_{a < b} V_{ab}(r_{ab}) \quad (\text{A.1})$$

benutzt, um für ein N-Teilchensystem  ${}^1H$  und  ${}^1G$  herzuleiten. Physikalisch wird dabei vorausgesetzt, dass nur Zwei-Körper-Wechselwirkungen vorliegen. Als Ergebnis wird für  ${}^1G_i$  angegeben (Gleichung (61) in [1]):

$${}^1G_i = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} x_{ai} + \frac{1}{2} \sum_{a < b} [V_{ab}(r_{ab})(x_{ai} + x_{bi}) + W_{ab}(r_{ab})(x_{ai} - x_{bi})], \quad (\text{A.2})$$

mit dem symmetrischen Potential  $V_{ab}(r_{ab})$  aus der 0-ten Ordnung von  $H$  und einem Potential  $W_{ab}(r_{ab})$ , über dessen Symmetrie nichts ausgesagt werden kann [1, S. 1607]. Der Ausdruck  $W_{ab}(r_{ab})$  geht auch in  ${}^1H$  ein. Zu der Herleitung von  ${}^1G_{ai}$  wird bemerkt [1, S. 1606]: „It should be noted that we did not use the world-line conditions in our derivation; nevertheless these conditions are satisfied in the order required.“

Beim Studieren der Herleitung fällt in Gleichung (A5) des Anhangs von [1] ein Problem auf: Dort heißt es ( $G_{2i} \hat{=} {}^0G_i$ ,  $N, R, S$  Teilchennummern,  $V_{RS}$  ist das

Potential aus  $H_0$ ): „The general solution of Eq. (57) is given by

$$G_{2i} = \sum_N x_{Ni} \frac{p_N^2}{2m_N} + \frac{1}{2} \sum_{R < S} \sum V_{RS}(x_{Ri} + x_{Si}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{R < S} \sum [(x_{Ri} - x_{Si}) W_{RS}(\vec{r}_R, \vec{r}_S, \vec{p}_R, \vec{p}_S) + (p_{Ri} + p_{Si}) \bar{W}_{RS}(\vec{r}_R, \vec{r}_S, \vec{p}_R, \vec{p}_S)], \quad (A5)$$

where the first sum is a particular solution of the inhomogeneous equation, and the second one the general solution of the homogeneous one, provided that

$$\sum_{R < S} \sum \left[ (x_{Ri} - x_{Si}) \left( \frac{\partial W_{RS}}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial W_{RS}}{\partial x_{Sj}} \right) + (p_{Ri} + p_{Si}) \left( \frac{\partial \bar{W}_{RS}}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \bar{W}_{RS}}{\partial x_{Sj}} \right) \right] = 0. \quad (A6)$$

Dabei ist Gleichung (57) gegeben durch:

$$\sum_N \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_{Nj}} = \delta_{ij} \left( \sum_N \frac{\vec{p}_N^2}{2m_N} + \sum_{N < R} \sum V_{NR} \right). \quad (57)$$

Offensichtlich ist die zweite Summe von (A5) *nicht* die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (57). Es spräche (mathematisch) nichts gegen Terme  $(p_{Ri} - p_{Si}) \tilde{W}_{RS}$ , sofern Gleichung (A6) entsprechend erweitert würde.

Eine Prüfung der weiteren Rechnung zeigt, dass in Gleichung (A8) Terme ausgelassen wurden. In der zweiten Zeile fehlt in der eckigen Klammer der Summand

$$\frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{RS}} (x_{Rj} - x_{Sj}) \quad (A.3)$$

und in der sechsten Zeile der Summand

$$\frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{SR}} (x_{Sj} - x_{Rj}). \quad (A.4)$$

Diese heben die übrigen  $\frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{RS}}$  bzw.  $\frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{SR}}$ -abhängigen Terme auf. Damit gilt

$$m_R \frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{RS}} = m_S \frac{\partial W_{RS}}{\partial \alpha_{SR}} \quad (A9)$$

nicht mehr und die folgende Rechnung ist nicht mehr durchführbar.

Wir wollen nun zeigen, dass es tatsächlich nicht möglich ist,  ${}^1G_{ai}$  ohne Benutzung der Weltlinienbedingung oder weiterer physikalischer Forderungen (außer der von Stachel, Havas, siehe oben) bis auf einen Term  $W_{ab}(r_{ab})(x_{ai} - x_{bi})$  zu bestimmen, dass also die Poincaré-Algebra (2.19-2.27) zusammen mit  $H_0$  unter der in [1] genannten physikalischen Voraussetzung die Größe  ${}^1G$  *nicht* bis auf den Term  $W_{ab}(r_{ab})(x_{ai} - x_{bi})$  bestimmt.

Dazu konstruieren wir ein Gegenbeispiel: Nehmen wir an,  $G_{(1)i}$  sei eine Lösung der genäherten Poincaré-Algebra und  $G'_{(1)i} = G_{(1)i} + \frac{1}{c^2}\alpha\Lambda_i$  sei eine weitere Lösung ( $\alpha = const.$ ). Dann ergibt Einsetzen von  $G'_{(1)i}$  in (2.24-2.27) für  $\Lambda_i$  die Gleichungen:

$$\{ {}^0G_i, \Lambda_j \} + \{ \Lambda_i, {}^0G_j \} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\{ \Lambda_i, H_0 \} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\{ {}^0J_i, \Lambda_j \} = \varepsilon_{ijk}\Lambda_k \quad (\text{A.7})$$

$$\{ \Lambda_i, {}^0P_j \} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Physikalisch genügt es, ein System mit  $H_0$  der Form (A.1) zu finden, in denen es eine vektorielle Erhaltungsgröße gibt, die Translations- und Galilei-invariant ist. Die Hamiltonfunktion  $H = \sum_{a=1}^2 \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{\gamma}{r}$  besitzt eine solche Erhaltungsgröße, den Runge-Lenz-Vektor  $\Lambda$ :

$$\Lambda = p \times L + (x_1 - x_2)\mu \frac{\gamma}{r} \quad (\text{A.9})$$

mit  $p_i = \frac{1}{m_1+m_2}(m_2p_{1i} - m_1p_{2i})$ ,  $L = (x_1 - x_2) \times p$  und  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ . Dieser kann in eine Form gebracht werden, in der man ihm die Invarianzeigenschaften (außer (A.6)) sofort ansieht:

$$\begin{aligned} \Lambda_i = & \mu^2(x_{1i} - x_{2i}) \left( \left( \frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{\gamma}{r} \right) \\ & - \mu^2 \left( \frac{p_{1i}}{m_1} - \frac{p_{2i}}{m_2} \right) \sum_k (x_{1k} - x_{2k}) \left( \frac{p_{1k}}{m_1} - \frac{p_{2k}}{m_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die Einheit des Vorfaktors  $\alpha$  muss die einer Masse  $^{-1}$  sein, er kann dafür genutzt werden,  $G'_i$  in den Teilchenindizes zu symmetrisieren, zusätzlich muss physikalisch

gefordert werden, dass der Vorfaktor bei verschwindender Kopplung ebenfalls verschwindet, so dass  $G_i$  bis zur zweiten Ordnung mit dem der freien Theorie übereinstimmt.<sup>1</sup> Diese Forderung kann nicht durch einen Vorfaktor erfüllt werden, der eine Funktion von  $\gamma, m_1, m_2$  ist. Der zusätzliche Term ist also in diesem Sinne nicht physikalisch.<sup>2</sup> Allerdings wird die Forderung nach Übereinstimmung mit der freien Theorie in [1] nicht gestellt, das heißt, im Rahmen von [1] ist mit (A.10) ein Gegenbeispiel zur obigen Aussage gefunden:  $\Lambda_i$  hat nicht die Form  $W_{ab}(r_{ab})(x_{ai} - x_{bi})$ .

---

<sup>1</sup>  $\Lambda_i$  ist offenbar antisymmetrisch, also z.B.  $\alpha = \beta \frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2)^2}$  mit dimensionslosem  $\beta$ .

<sup>2</sup> Man könnte weiterhin vermuten, dass die Erweiterung der Betrachtung auf 2pN-Terme gegen einen Term  $\alpha \Lambda_i$  spricht. (2.25) führt in diesem Fall unter anderem auf

$$\frac{1}{c^4}(\{\Delta_i, H_0\} + \{\Lambda_i, {}^1H\}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

und damit auf die Frage, ob es eine 1pN-Erweiterung  $\Delta_i$  des Runge-Lenz-Vektors gibt. Eine solche existiert tatsächlich [64], die Abhängigkeiten sind aber recht kompliziert und erschweren weitere Überlegungen.

## Anhang B

# Die 3pN-Lagrangefunktion in harmonischer Eichung

In harmonischer Eichung ist  $L_{3pN}$  gegeben durch:

$$\begin{aligned}
L_{3pN} = & \frac{Gm_1m_2}{2r} + \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} \\
& + \frac{1}{c^2} \left\{ -\frac{G^2m_1^2m_2}{2r^2} + \frac{m_1\dot{x}_1^4}{8} + \frac{Gm_1m_2}{r} \left( -\frac{1}{4}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2) + \frac{3}{2}\dot{x}_1^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{4}(\dot{x}_1\dot{x}_2) \right) \right\} \\
& + \frac{1}{c^4} \left\{ \frac{G^3m_1^3m_2}{2r^3} + \frac{19G^3m_1^2m_2^2}{8r^3} + \frac{G^2m_1^2m_2}{r^2} \left( \frac{7}{2}(n_{12}\dot{x}_1)^2 - \frac{7}{2}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2}(n_{12}\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{4}\dot{x}_1^2 - \frac{7}{4}(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{7}{4}\dot{x}_2^2 \right) + \frac{Gm_1m_2}{r} \left( \frac{3}{16}(n_{12}\dot{x}_1)^2(n_{12}\dot{x}_2)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{7}{8}(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_1^2 + \frac{7}{8}\dot{x}_1^4 + \frac{3}{4}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)(\dot{x}_1\dot{x}_2) - 2\dot{x}_1^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8}(\dot{x}_1\dot{x}_2)^2 + \frac{15}{16}\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 \right) + \frac{m_1\dot{x}_1^6}{16} + Gm_1m_2 \left( -\frac{7}{4}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2 + \frac{7}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)\dot{x}_2^2 \right) \right\} \\
& + \frac{1}{c^6} \left\{ \frac{G^2m_1^2m_2}{r^2} \left( \frac{13}{18}(n_{12}\dot{x}_1)^4 + \frac{83}{18}(n_{12}\dot{x}_1)^3(n_{12}\dot{x}_2) - \frac{35}{6}(n_{12}\dot{x}_1)^2(n_{12}\dot{x}_2)^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{245}{24}(n_{12}\dot{x}_1)^2\dot{x}_1^2 + \frac{179}{12}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^2 - \frac{235}{24}(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_1^2 + \frac{373}{48}\dot{x}_1^4 \\
& + \frac{529}{24}(n_{12}\dot{x}_1)^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{97}{6}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)(\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{719}{24}\dot{x}_1^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) \\
& + \frac{463}{24}(\dot{x}_1\dot{x}_2)^2 - \frac{7}{24}(n_{12}\dot{x}_1)^2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_2^2 \\
& + \frac{463}{48}\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 - \frac{19}{2}(\dot{x}_1\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 + \frac{45}{16}\dot{x}_2^4 \Big) + \frac{5m_1\dot{x}_1^8}{128} \\
& + Gm_1m_2 \left( \frac{3}{8}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2 + \frac{5}{12}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2)^3 \right. \\
& + \frac{1}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^3 + \frac{1}{16}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^4 + \frac{11}{4}(\ddot{x}_1\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^2 \\
& - (\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^2 - 2(\ddot{x}_1\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{1}{4}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2)(\dot{x}_1\dot{x}_2) \\
& + \frac{3}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{5}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_1)^2\dot{x}_2^2 + \frac{15}{8}(\ddot{x}_1\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 \\
& - \frac{15}{8}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 \\
& - \frac{5}{16}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_2^2 \Big) + \frac{G^2m_1^2m_2}{r} \left( -\frac{235}{24}(\ddot{x}_2\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_1) \right. \\
& - \frac{29}{24}(n_{12}\ddot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_1)^2 - \frac{235}{24}(\ddot{x}_1\dot{x}_2)(n_{12}\dot{x}_2) - \frac{17}{6}(n_{12}\ddot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^2 \\
& + \frac{185}{16}(n_{12}\ddot{x}_1)\dot{x}_1^2 - \frac{235}{48}(n_{12}\ddot{x}_2)\dot{x}_1^2 - \frac{185}{8}(n_{12}\ddot{x}_1)(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{20}{3}(n_{12}\ddot{x}_1)\dot{x}_2^2 \Big) \\
& + \frac{Gm_1m_2}{r} \left( -\frac{5}{32}(n_{12}\dot{x}_1)^3(n_{12}\dot{x}_2)^3 + \frac{1}{8}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)^3\dot{x}_1^2 + \frac{5}{8}(n_{12}\dot{x}_2)^4\dot{x}_1^2 \right. \\
& - \frac{11}{16}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^4 + \frac{1}{4}(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_1^4 + \frac{11}{16}\dot{x}_1^6 - \frac{15}{32}(n_{12}\dot{x}_1)^2(n_{12}\dot{x}_2)^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) \\
& + (n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{3}{8}(n_{12}\dot{x}_2)^2\dot{x}_1^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) \\
& - \frac{13}{16}\dot{x}_1^4(\dot{x}_1\dot{x}_2) + \frac{5}{16}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)(\dot{x}_1\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{16}(\dot{x}_1\dot{x}_2)^3 - \frac{5}{8}(n_{12}\dot{x}_1)^2\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 \\
& - \frac{23}{32}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{16}\dot{x}_1^4\dot{x}_2^2 - \frac{1}{32}\dot{x}_1^2(\dot{x}_1\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 \Big) - \frac{3G^4m_1^4m_2}{8r^4} \\
& + \frac{G^4m_1^3m_2^2}{r^4} \left( -\frac{5809}{280} + \frac{11}{3}\lambda + \frac{22}{3}\ln\left(\frac{r}{r'_1}\right) \right) + \frac{G^3m_1^2m_2^2}{r^3} \left( \frac{383}{24}(n_{12}\dot{x}_1)^2 \right. \\
& - \frac{889}{48}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2) - \frac{123}{64}(n_{12}\dot{x}_1)^2\pi^2 + \frac{123}{64}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2)\pi^2 - \frac{305}{72}\dot{x}_1^2 \\
& + \frac{41}{64}\pi^2\dot{x}_1^2 + \frac{439}{144}(\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{41}{64}\pi^2(\dot{x}_1\dot{x}_2) \Big) + \frac{G^3m_1^3m_2}{r^3} \left( -\frac{8243}{210}(n_{12}\dot{x}_1)^2 \right. \\
& + \frac{15541}{420}(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2) + \frac{3}{2}(n_{12}\dot{x}_2)^2 + \frac{15611}{1260}\dot{x}_1^2 - \frac{17501}{1260}(\dot{x}_1\dot{x}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{4} \dot{x}_2^2 + 22(n_{12}\dot{x}_1)^2 \ln \left( \frac{r}{r'_1} \right) - 22(n_{12}\dot{x}_1)(n_{12}\dot{x}_2) \ln \left( \frac{r}{r'_1} \right) \\
& - \frac{22}{3} \dot{x}_1^2 \ln \left( \frac{r}{r'_1} \right) + \frac{22}{3} (\dot{x}_1 \dot{x}_2) \ln \left( \frac{r}{r'_1} \right) \Bigg) \Bigg\} \\
& + 1 \leftrightarrow 2 + O \left( \frac{1}{c^7} \right) . \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Der unbestimmte Faktor  $\lambda$  wurde von T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer [25] durch dimensionale Regularisierung zu  $\lambda = -\frac{1987}{3080}$  bestimmt, die Konstanten  $r'_1$  und  $r'_2$  lassen sich durch eine Eichtransformation innerhalb der harmonischen Eichung entfernen.

# Anhang C

## Ableitung der Zwangsbedingungen (3pN)

In diesem Anhang sollen die Zwangsbedingungen für das Zweiteilchen-System in dritter post-Newtonsscher Näherung abgeleitet werden.

Nullvektor der Hesse-Matrix ist sicher jeder Vektor, der eine Vielfache von  $\varepsilon^2$  ist. Als primäre Zwangsbedingungen ergeben sich damit (unter anderem):

$$\varepsilon^2 \left( m_\alpha x_\alpha^{(2)} - \sum_{s=0}^1 \varepsilon^s B_{\alpha,2,s}(x, x^{(1)}) \right) = O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.1})$$

Durch Ableiten und Eliminieren der auftretenden Beschleunigung mit Hilfe von (C.1) ergibt sich:

$$\varepsilon^2 \left( m_\alpha x_\alpha^{(3)} - \sum_{s=0}^1 \varepsilon^s B_{\alpha,3,s}(x, x^{(1)}) \right) = O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.2})$$

(Vgl. Glg. (A7) in [3].) Wenn diese Zwangsbedingungen für alle Zeiten erfüllt sein sollen, muss auch

$$\varepsilon^2 \left( m_\alpha x_\alpha^{(4)} - \sum_{s=0}^1 \varepsilon^s B_{\alpha,4,s}(x, x^{(1)}) \right) = O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.3})$$

gelten. Dies ist eigentlich keine Zwangsbedingung, da  $x_\alpha^{(4)}$  keine Variable des Konfigurationsraumes ist. Aber wir können daraus die Zwangsbedingungen multipli-

ziert mit  $\varepsilon$  gewinnen, indem wir die Bewegungsgleichungen mit  $\varepsilon$  multiplizieren und alle vorkommenden höheren Ableitungen mit Hilfe von (C.1-C.3) eliminieren. Nach zeitlichem Ableiten und Eliminieren auftretender Beschleunigungen ergibt sich:

$$\varepsilon \left( m_\alpha x_\alpha^{(r)} - \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s B_{\alpha,r,s}(x, x^{(1)}) \right) = O(\varepsilon^4), \quad r = 2, 3. \quad (\text{C.4})$$

Auch diese Zwangsbedingungen müssen für alle Zeiten erfüllt sein:

$$\varepsilon \left( m_\alpha x_\alpha^{(4)} - \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s B_{\alpha,4,s}(x, x^{(1)}) \right) = O(\varepsilon^4). \quad (\text{C.5})$$

Damit können wir in die Bewegungsgleichung eingehen und erhalten als Zwangsbedingungen

$$m_\alpha x_\alpha^{(r)} - \sum_{s=0}^2 \varepsilon^s B_{\alpha,r,s}(x, x^{(1)}) = O(\varepsilon^4), \quad r = 2, 3. \quad (\text{C.6})$$

Diese Zwangsbedingungen sind zeitlich stabil, weil Einsetzen aller Zwangsbedingungen und der Bedingung für zeitliche Stabilität in die Bewegungsgleichungen wieder auf die Zwangsbedingung (C.6) mit  $r = 2$  führt.<sup>1</sup> Man kann nun genauso wie in Abschnitt 6.3 argumentieren, dass weitere Nullvektoren der Hesse-Matrix nicht zu weiteren Zwangsbedingungen führen.

---

<sup>1</sup>Die Zwangsbedingungen lassen sich also genauso berechnen wie vorher, nur dass am Ende zweimal die Bewegungsgleichung benutzt wird.

# Anhang D

## Die elementaren Dirac-Klammern (3pN)

In diesem Anhang sollen die elementaren Dirac-Klammern des 3pN-Zweiteilchen-Systems bestimmt werden. Alle Relationen sind Relationen auf  $R[\varepsilon]/[\varepsilon^4]$ .

Zur Berechnung der elementaren Dirac-Klammern ist zunächst die Poissonklammer-Matrix  $D$  der Zwangsbedingungen (7.8) zu bestimmen. Wir teilen sie in  $6 \times 6$ -Untermatrizen auf:

$$D = \begin{pmatrix} S & T \\ -T^T & U \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} &= \{\chi_{1\alpha}, \chi_{1\beta}\} \\ &= \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta^{(1)}} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha,\beta} &= \{\chi_{1\alpha}, \omega_{1\beta}\} \\ &= -\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial \Phi_{0\beta}}{\partial x_\alpha^{(1)}} + \varepsilon^2 \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha,\beta} &= \{\omega_{1\alpha}, \omega_{1\beta}\} \\ &= \varepsilon \frac{1}{m_\alpha m_\beta} \left( \frac{\partial \Phi_{0\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_{0\alpha}}{\partial x_\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Nun ist  $D$  zu invertieren. Dazu zerlegen wir  $D$  in Ordnungen von  $\varepsilon$ :

$$D = \sum_{s=0}^n \varepsilon^s {}^s D^{-1} + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (\text{D.5})$$

Wie man durch vollständige Induktion zeigt, ist die inverse Matrix bis zur n-ten Ordnung durch

$$D^{-1} = \left( \mathbf{1} + \sum_{s=1}^n \varepsilon^s {}^s N \right) {}^0 D \quad (\text{D.6})$$

gegeben [3].  ${}^s N$  berechnet sich iterativ aus

$${}^s N = - {}^0 D^{-1} {}^s D - \sum_{r=1}^{s-1} {}^0 D^{-1} {}^{r-s} D {}^r N \quad (\text{D.7})$$

Wir benötigen  $D$  bis zur  $n+1$ -ten Ordnung ( $n=2$ ), d. h.

$$D^{-1} = \left( \mathbf{1} + \sum_{s=1}^3 \varepsilon^s {}^s N \right) {}^0 D^{-1} + O(\varepsilon^4) \quad (\text{D.8})$$

Explizit ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{-1} &= {}^0 D^{-1} - \varepsilon {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( - {}^0 D^{-1} {}^2 D {}^0 D^{-1} + {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left( - {}^0 D^{-1} {}^3 D {}^0 D^{-1} + {}^0 D^{-1} {}^2 D {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} \right. \\ &\quad \quad \left. + {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} {}^2 D {}^0 D^{-1} \right. \\ &\quad \quad \left. - {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} {}^1 D {}^0 D^{-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Wir zerlegen  $D^{-1}$  nun in Untermatrizen

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^T & Z \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

und berücksichtigen

$$\{x_\alpha, \omega_{1\beta}\} = O(\varepsilon^0) \quad (\text{D.11})$$

$$\{x_\alpha, \chi_{1\beta}\} = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\{\Pi_{0\alpha}, \omega_{1\beta}\} = O(\varepsilon) \quad (\text{D.13})$$

$$\{\Pi_{0\alpha}, \chi_{1\beta}\} = O(\varepsilon^2). \quad (\text{D.14})$$

Aus der Definition der Dirac-Klammer (3.56) ergibt sich, dass wir zur Berechnung der elementaren Dirac-Klammern

Y bis zur Ordnung 1

Z bis zur Ordnung 2

X nicht

benötigen. Ausrechnen ergibt:

$$Y_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_{0\alpha}}{\partial x_\beta^{(1)}} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} Z_{\alpha,\beta} &= \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta^{(1)}} \right] \\ &\quad - \varepsilon^3 \left[ \sum_\gamma \left( \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\gamma^{(1)}} \right) \left( \frac{1}{m_\gamma} \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\beta^{(1)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\beta^{(1)}} - \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial x_\gamma^{(1)}} \right) \left( \frac{1}{m_\gamma} \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\alpha^{(1)}} \right) \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Für die elementaren Dirac-Klammern erhalten wir:

$$\{x_\alpha, x_\beta\}^* = \frac{1}{m_\alpha m_\beta} Z_{\alpha,\beta} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \{x_\alpha, \Pi_\beta\}^* &= \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\beta} \\ &\quad + \varepsilon^3 \sum_\gamma \frac{1}{m_\alpha m_\gamma} \left( \left( \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial x_\gamma^{(1)}} \right) \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\alpha^{(1)}} \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \{\Pi_\alpha, \Pi_\beta\}^* &= \epsilon^3 \sum_\gamma \frac{1}{m_\gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Phi_{0\gamma}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \Phi_{1\gamma}}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] J. Stachel, P. Havas, Phys Rev D, 13, 6 (1976).
- [2] J. Martin, J. L. Sanz, J Math Phys 20, 1 (1979).
- [3] X. Jaen, J. Llosa, A. Molina, Phys Rev D 34, 8 (1986).
- [4] M. Schneider, „Himmelsmechanik, Band III: Gravitationsphysik“, Heidelberg: Spektrum (1996).
- [5] T. Damour, „Gravitational Radiation and Motion of Compact Bodies“, in N. Deruelle, T. Piran, „Rayonnement Gravitationnel“, Amsterdam: North-Holland (1983).
- [6] Y. Itoh, gr-qc/0310029 (2003).
- [7] H. Leutwyler, Il Nuovo Cimento, XXXVII, 2 (1965).
- [8] D. G. Currie, T. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan, Rev. Mod. Phys., 35, 350 (1963).
- [9] J. T. Cannon, T. F. Jordan, J Math Phys 5, 299 (1964).
- [10] R. P. Gaida, Y. B. Kluchkovsky, V. I. Tretyak, „Three-Dimensional Lagrangian Approach to the Classical Relativistic Dynamics of Directly Interacting Particles“ in G. Longhi, L. Lusanna (Hrsg.), „Constraint’s Theory and Relativistic Dynamics“, Singapore: World Scientific (1987).
- [11] E. H. Kerner, J Math Phys 3, 35 (1962).
- [12] J. A. Wheeler, R.P. Feynman, Rev Mod Phys 21, 3 (1949).
- [13] E. H. Kerner, J Math Phys 6, 1218 (1965).
- [14] H. Bethe, E. E. Salpeter, „Quantum mechanics of one and two electron atoms“, New York: Plenum Publications (1977).
- [15] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, „Lehrbuch der theoretischen Physik“, Band II, „Klassische Feldtheorie“, Berlin: Akademie-Verlag (1992).
- [16] B. M. Barker, R. F. O’Connell, Can J Phys 58, 12 (1980).
- [17] S. M. Carroll, „Lecture Notes on General Relativity“, gr-qc/9712019 (1997).
- [18] S. Weinberg, „Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of

- the General Theory of Relativity“, New York: Wiley (1972).
- [19] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, „Gravitation: An Introduction to Current Research“, edited by L. Witten, New York: Wiley (1962).
- [20] A. Wachter, H. Hoeber, „Repetitorium Theoretische Physik“, Heidelberg: Springer (1998).
- [21] J. D. Jackson, „Klassische Elektrodynamik“, Berlin: de Gruyter (2002).
- [22] J. Hadamard, „Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques“, Paris: Hermann (1932).
- [23] L. Blanchet, G. Faye, Phys Rev D 63, 062005 (2001).
- [24] L. Blanchet, G. Faye, J Math Phys 42, 9 (2001).
- [25] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, Phys Lett B 513, 147 (2001).
- [26] L. Blanchet, T. Damour, G. Esposito-Farese, gr-qc/0311052 (2003).
- [27] E. Schmutzler, „Relativistische Physik“, Leipzig: Teubner (1968).
- [28] L. Blanchet, „On the accuracy of the post-Newtonian approximation“, in I. Ciufolini, D. Dominici and L. Lusanna (Hrsg.), „2001: a relativistic spacetime odyssey“, Singapore: World Scientific (2001).
- [29] P. Jaranowski, G. Schäfer, Phys Rev D 57, 7274 (1998).
- [30] G. Schäfer, „Gravitationswellen“, Vorlesungsskript (2002).
- [31] T. Damour, „The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity“, in S. Hawking, W. Israel (Hrsg.), „300 years of gravitation“, Cambridge: Cambridge University Press (1990).
- [32] V. C. Andrade, L. Blanchet, G. Faye, Class Qu Grav 18, 753 (2001).
- [33] T. Damour, G. Schäfer, Gen Rel Grav 17, 879 (1985).
- [34] H. Stephani, „Allgemeine Relativitätstheorie“, Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften (1991).
- [35] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, „Relativität, Gruppen, Teilchen“, Wien: Springer (1976).
- [36] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, „Einführung in die Mechanik und Symmetrie“, Heidelberg: Springer (2001).
- [37] W. Greiner, J. Rafelski, „Spezielle Relativitätstheorie“, Frankfurt: Deutsch (1992).
- [38] F. Scheck, „Theoretische Physik“, Band 1, „Mechanik“, Heidelberg: Springer (1999).
- [39] P. Mittelstaedt, „Klassische Mechanik“, Mannheim: BI (1995).
- [40] M. Borneas, Phys Rev 186, 5 (1969).

- [41] W. Greiner, J. Reinhardt, „Feldquantisierung“, Frankfurt a. M.: Deutsch (1993).
- [42] E. T. Whittaker, „A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies“, Cambridge: Cambridge University Press (1999).
- [43] M. V. Ostrogradski, Mem Acad St. Petersburg 6, 85 (1850).
- [44] K. Sundermeyer, „Constrained Dynamics“, Heidelberg: Springer (1982).
- [45] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, „Classical Dynamics - A Modern Perspective“, Malabar: Krieger (1983).
- [46] X. Gracia, J. M. Pons, N. Roman-Roy, J Math Phys 32, 2745 (1991).
- [47] M. Henneaux, C. Teitelboim, „Quantization of Gauge Systems“, Princeton: University Press (1992).
- [48] F. Kuypers, „Klassische Mechanik“, Weinheim: Wiley (1997).
- [49] E. Kamke, „Differentialgleichungen“, Band 2, „Partielle Differentialgleichungen“, Stuttgart: Teubner (1979).
- [50] J. T. Cannon, T. F. Jordan, J Math Phys 5, 3 (1964).
- [51] J. Martin, J. L. Sanz, J Math Phys 19, 780 (1978).
- [52] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, Phys Rev D 62, 021501 (2000).
- [53] W. Thirring, „Lehrbuch der Mathematischen Physik“, Wien: Springer (1988).
- [54] J. G. Fichtenholz, Zh Eksp Teor Fiz 20, 233 (1950).
- [55] B. M. Barker, R. F. O'Connell, Ann of Phys 129, 358 (1980).
- [56] T. Damour, C. R. Sci. Paris 294, série II 1355 (1982).
- [57] S. M. Kopeikin, PhD Thesis, Moscow State University, Moscow (1986).
- [58] G. Schäfer, Phys Lett A 123, 7 (1987).
- [59] T. Ohta, T. Kimura, J Math Phys 34, 10 (1993).
- [60] Y. Saito, R. Sugano, T. Ohta, T. Kimura, J Math Phys 30, 5 (1989).
- [61] T. Damour, G. Schäfer, Phys Rev D 37, 4 (1988).
- [62] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, Phys Rev D 62, 044024 (2000).
- [63] L. Blanchet, G. Faye, Phys Lett A 271, 58 (2000).
- [64] F. Argüeso, J. L. Sanz, J Math Phys 25, 10 (1984).

# Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Jena, den 5. Januar 2004

Raoul-Martin Memmesheimer

# Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Gerhard Schäfer für die vorzügliche Betreuung meiner Diplomarbeit und die Vergabe des schönen Themas bedanken.

Für anregende Gespräche und Diskussionen danke ich Frau Dipl. Phys. Dörte Hansen, Herrn Dr. David Petroff, Herrn Dr. Achamveedu Gopakumar und besonders Herrn Dr. Guillaume Faye.